गणित प्रयोगशाला का उद्देश्य

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1986 के कथनानुसार "गणित, बच्चों में सोचना, विश्लेषण करना, तार्किक कारीगरी सिखलाने जैसा यंत्र दिखाई देना चाहिए"। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा लाई गई राष्ट्रीय पाठयचर्या रूपरेखा–2005 के कथनानुसार, "गणित शिक्षण के मुख्य उद्देश्य केवल तभी प्राप्त किए जा सकते हैं जब विद्यार्थियों को स्वयं अन्वेषण करने का, विषय स्थापित करने का, सत्यापित करने का, गणितीय परिणामों का प्रायोगिक परीक्षण करने का एक अवसर प्राप्त हो। इसलिए यहाँ गणितीय प्रश्नों को यंत्रवत् हल करने के लिए नियमों और सूत्रों की प्रवीणता पर केवल ध्यान एकाग्र करने और परिक्षाओं को उत्तीर्ण करने के (बजाय) अतिरिक्त क्रियाकलाप युक्त प्रक्रिया को ग्रहण करने की आवश्यकता है। यहाँ इस बात की आवश्यकता है कि शिक्षार्थियों को अभ्यास प्रणाली द्वारा गणितीय विचारों को पारस्परिक बातचीत से, वैचारिक आदान–प्रदान से प्रदर्शित करने का अवसर दिया जाए।

नि:संदेह एक प्रयोगशाला वह स्थान है जहाँ वैज्ञानिक खोज और स्त्यापन, अनुसंधान और आविष्कार के लिए प्रयोग किए जाते हैं। विशेषतया गणित में, प्रयोगशाला की भूमिका गणितीय संकल्पनाओं और सूत्रों को क्रियाकलापों द्वारा समझाने में सहायता करता है। यह उल्लेखनीय है कि गणित में पैटर्न, केंद्रीय बिंदु है जिसकी हमें गणितीय संकल्पनाओं/प्रमेयों/सूत्रों के बारे में पूरी जानकारी प्राप्त करने में प्रायोगिक रूप से उत्पन्न करने की आवश्यकता है। गणित प्रयोगशाला केवल पाठन सहायक सामग्री का संग्रह न होकर अपितु विद्यार्थियों/अध्यापकों द्वारा क्रियाकलापों को करके गणितीय संकल्पनाओं की सत्यता को पुन: स्थापित करने के महत्व पर ध्यान देना है। यद्यपि विद्यार्थियों को प्रेरित करने के लिए कुछ रुचिकर तैयार ज्यामिति मॉडल या अन्य मॉडल भी हो सकते हैं। अधिकांशत: ये मॉडल व्यवहार कौशल एवं क्रियाशील हों।

एक गणित प्रयोगशाला, गणितीय जानकारी, प्रवीणता, धनात्मक मनोवृत्ति और गणित के विभिन्न प्रकरण जैसे कि बीजगणित, ज्यामिति, त्रिकोणमिति, कलन, निर्देशांक ज्यामिति इत्यादि में प्रयोग करके सीखने में प्रोत्साहित करती है। यह वह स्थान है जहाँ विद्यार्थी निश्चित (अनिवार्य) संकल्पना को निश्चित ध्येय के साथ सीख सकता है तथा मॉडलों, मापनों और दूसरे क्रियाकलापों से कई गणितीय अवधारणाओं और गुणों को सत्यापित कर सकता है। यह बच्चों को सारणियों, कैलकुलेटरों इत्यादि के प्रयोग से निश्चित गणनाएँ करने का सुअवसर देगा और उपचारी शिक्षण (अनुदेश) एवं दृश्य (आडियो एव वीडियो) कैसेट सुन व देख सकते हैं। गणित प्रयोगशाला अध्यापकों को निश्चित सामग्री मॉडलों, चार्टों की सहायता से अनेकों गणितीय अवधारणाओं, तथ्यों और गुणों को समझाने और व्यक्त करने (प्रदर्शित करने) का अवसर देती है। प्रयोगशाला में

अध्यापक, थर्मोकोल, कार्ड–बोर्ड (गत्तों) जैसी सामग्री का प्रयोग कर समरूप मॉडलों और चार्टो को तैयार करने के लिए छात्रों को प्रोत्साहित कर सकते हैं। प्रयोगशाला अध्यापकों के लिए कोई चर्चित प्रश्न या कोई महत्वपूर्ण गणितीय (विषम) समस्या के विचार–विमर्श हेतु आयोजन के लिए एक मंच की भाँति कार्य करेगी। यह अध्यापकों और विद्यार्थियों के लिए अनेकों गणितीय समारोहों और मनोरंजक क्रियाकलापों के लिए भी एक स्थल होगा।

प्रस्तुत गणित प्रयोगशाला द्वारा शिक्षार्थियों को निम्नलिखित अवसर प्रदान करने की अपेक्षा की जाती है–

- सूत्रों की पूरी जानकारी प्रदान करने के लिए पैटर्न खोजना।
- बीजीय एंव विश्लेषणात्मक परिणामों का ज्यामितीय प्रारूप देखना।
- गणितीय परिणामों/सूत्रों या संकल्पनाओं की प्रयोगात्मक प्रदर्शन द्वारा रूपरेखा तैयार करना।
- वाद–विवाद और परिचर्चाओं द्वारा विद्यार्थियों और अध्यापकों में पारस्परिक आदान प्रदान को प्रोत्साहित करना।
- विद्यार्थियों को पैटर्नों को पहचानने, उनका विस्तार करने तथा उन्हें सूत्रबद्ध करने को प्रोत्साहित करना और उन्हें समस्याओं को अनुमानित कथनों के रूप में प्रस्तुत करने योग्य बनाना।
- विद्यार्थियों को गणित की मूर्त से अमूर्त वाली मौलिक–प्रवृति की पूर्ण रूप से समझने में सहायता प्रदान करना।
- तर्क संगत विवेचन एंव व्याख्या करने में विभिन्न स्तर वाले विद्यार्थियों के समूहों को कौशलताओं के विकास के लिए अवसर प्रदान करना।
- विद्यार्थियों के स्वयं ज्ञान–अर्जन में सहायता करना।
- गणित में कुछ रुचिकर क्रियाकलापों का प्रदर्शन करना।
- अध्यापक के समुचित मार्गदर्शन में कुछ परियोजनाएँ पूरी करना।
- कुछ अमूर्त संकल्पनाओं को त्रिविमीय मॉडलों के उपयोग द्वारा सुस्पष्ट करना।
- दैनिक जीवन की समस्याओं के साथ गणित के संबंध का प्रदर्शन करना।

शिक्षण–अधिगम में गणित प्रयोगशाला की भूमिका

उच्च माध्यमिक स्तर पर गणित विषय माध्यमिक स्तर पर प्रयुक्त गणित से थोड़ा अधिक अमूर्त है, अतः इस स्तर पर गणित प्रयोगशाला की भूमिका गणित के अध्ययन में और अधिक महत्वपूर्ण हो जाती है।

गणित प्रयोगशाला की भूमिका कुछ निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट की गई है–

- गणित प्रयोगशाला विद्यार्थियों को स्थूल वस्तुओं एवं स्थितियों के माध्यम से अमूर्त विचारों और संकल्पनाओं को समझने का अवसर प्रदान करेगी।
- संबंध एवं फलनों की संकल्पनाओं को प्रतिदर्श एवं तीरों द्वारा निर्मित आरेखों से आसानी से समझा जा सकता है।
- त्रिविमीय संकल्पनाओं को गणित प्रयोगशाला में त्रिविमीय मॉडल द्वारा समझा जा सकता है। जबकि इन अवधारणाओं को श्यामपट्ट पर समझना कठिन होता है।
- फलनों की अवधारणा एवं इनके व्युत्क्रम फलनों को गणितीय औजारों द्वारा आरेख खींच कर $y = x$ के सापेक्ष सममिति रूप में दर्शाना प्रयोगशाला में ही किया जा सकता है।
- गणित प्रयोगशाला गणित सीखने की प्रक्रिया में व्यक्तिगत एवं स्वतंत्र रूप से अवसर प्रदान करती है।
- गणित प्रयोगशाला विद्यार्थियों के सोचने, समझने एवं अध्यापक से चर्चा करने हेतु प्रोत्साहित करती है। अतः विद्यार्थी गणित की संकल्पनाओं को प्रभावी ढ़ग से आत्मसात कर सकता है।
- गणित प्रयोगशाला अध्यापकों को अमूर्त गणितीय संकल्पनाओं को स्थूल विषय वस्तुओं द्वारा प्रदर्शन एवं व्याख्या करने में सक्षम बनाती है।

प्रयोगशाला का प्रबंधन और रख-रखाव

इसमें कोई दो राय नहीं है कि प्रभावी शिक्षण और अधिगम के लिए, 'स्वयं करके सीखना' अति महत्वपूर्ण है, क्योंकि इससे प्राप्त अनुभव बच्चे के मस्तिष्क में स्थायी रूप से घर कर जाते हैं। इसको खोजना कि गणित क्या है तथा सत्य पर पहुँचना स्वयं करने का आनंद, समझ और सकारात्मक दृष्टिकोण विकसित करना गणित की अधिगम प्रक्रियाएँ प्रदान करता है तथा इन सभी के ऊपर सबसे बड़ी बात यह है कि सुविधा प्रदान करने वाले व्यक्ति के रूप में शिक्षक से लगाव का अनुभव होना। ऐसा कहा जाता है कि "एक साधारण शिक्षक सत्य की शिक्षा देता है, परंतु एक अच्छा शिक्षक यह शिक्षा देता है कि सत्य पर किस प्रकार पहुँचा जाए।"

शिक्षक के मार्गदर्शन के अंतर्गत किए गए क्रियाकलापों के माध्यम से एक निष्कर्ष के रूप में सीखा गया सिद्धांत या सीखी गई अवधारणा अधिगम की अन्य सभी विधियों से श्रेष्ठ है तथा इस आधार पर निर्मित सिद्धांत भूले नहीं जा सकते। इसके विपरीत कक्षा में बताई गई कोई अवधारणा, जिसका बाद में प्रयोगशाला में सत्यापन कर लिया गया हो, न तो बच्चे को कोई बड़ा अनुभव प्रदान करती है और न ही उसमें कोई अच्छी बात जानने की उत्सुकता जागृत करती है तथा न ही किसी अर्थ में कोई उपलब्धि प्रदान करती है।

एक प्रयोगशाला पानी, बिजली, इत्यादि की सुविधाओं के साथ-साथ यंत्रों (औज़ारों), उपकरणों, सयंत्रों, मॉडलों से सुसज्जित होती है। इनमें से किसी भी एक सामग्री या सुविधा के उपलब्ध न होने पर, प्रयोगशाला में किसी भी प्रयोग या क्रियाकलाप को करने में बाधा आ सकती है। इसलिए, प्रयोगशाला का प्रबंधन अच्छी प्रकार से होना चाहिए तथा उसका रख-रखाव सुचारु रूप से होना चाहिए।

एक प्रयोगशाला का प्रबंधन और उसका रख-रखाव व्यक्तियों और आवश्यक सामग्री द्वारा होता है। इसलिए, किसी प्रयोगशाला के प्रबंधन और रख-रखाव को दो श्रेणियों, अर्थात् व्यक्तिगत प्रबंधन और रख-रखाव तथा सामग्री प्रबंधन और रख-रखाव में विभक्त किया जा सकता है।

(क) व्यक्तिगत प्रबंधन और रख-रखाव

जो व्यक्ति प्रयोगशालाओं का प्रबंधन और रख-रखाव करते हैं, सामान्यत: प्रयोगशाला सहायक और प्रयोगशाला अटेंडेंट (attendant) कहलाते हैं। इनको प्रयोगशाला कर्मी भी कहा जाता है। शैक्षिक कर्मी भी समय-समय पर, जब भी आवश्यकता हो, प्रयोगशाला के प्रबंधन और रख-रखाव में सहायता करते हैं।

व्यक्तिगत प्रबंधन और रख-रखाव में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखा जाता है-

1. **सफ़ाई**

एक प्रयोगशाला सदैव ही स्वच्छ और साफ रहनी चाहिए। जब विद्यार्थी दिन में प्रयोग/क्रियाकलाप करते हैं, तो यह निश्चय ही गंदी हो जाती है तथा वस्तुएँ इधर-उधर बिखर जाती हैं। इसलिए, प्रयोगशाला कर्मी का यह कर्तव्य है कि जब दिन का कार्य समाप्त हो जाए, तो वे प्रयोगशाला की सफ़ाई कर दें तथा यदि वस्तुएँ इधर-उधर बिखरी पड़ी हैं, तो उनको उचित स्थानों पर रख दें।

2. **दिन के कार्य के लिए सामग्री की जाँच करना और उसे व्यवस्थित करना**

प्रयोगशाला कर्मी को यह पता होना चाहिए कि किसी विशेष दिन कौन से क्रियाकलाप कराए जाने हैं। उस दिन किए जाने वाले क्रियाकलापों के लिए आवश्यक सामग्री को एक दिन पहले व्यवस्थित कर लेना चाहिए।

इससे पहले कि कक्षा के विद्यार्थी कोई क्रियाकलाप करने आएँ या शिक्षक विद्यार्थियों को प्रदर्शन दिखाने के लिए लाए, सभी सामग्री और यंत्र मेज पर व्यवस्थित कर देने चाहिए।

3. पानी, बिजली, इत्यादि सुविधाओं की जाँच कर लेनी चाहिए तथा इन्हें प्रयोग करने के दौरान उपलब्ध कराया जाना चाहिए।

4. यह अच्छा रहता है कि यदि सामग्री और सयंत्रों की एक सूची प्रयोगशाला की दीवार पर चिपका दी जाए।

5. प्रयोगशाला में कार्य करते समय, अनेक सुरक्षा उपायों की आवश्यकता होती है। इन उपायों की एक सूची प्रयोगशाला की दीवार पर चिपकाई जा सकती है।

6. प्रयोगशाला कर्मियों को चुनते समय, विद्यालय के अधिकारियों (या प्रशासन) को यह देख लेना चाहिए कि इन व्यक्तियों की शिक्षा गणित पृष्ठभूमि के साथ हो।

7. नए चुने गए प्रयोगशाला कर्मियों के लिए स्कूल के गणित शिक्षकों या स्कूल के बाहर के कुछ संसाधन व्यक्तियों की सहायता से 7 या 10 दिन का एक प्रशिक्षण कार्यक्रम आयोजित किया जाना चाहिए।

8. प्रयोगशाला में एक प्रथम उपचार किट रखी जानी चाहिए।

(ख) सामग्री का प्रबंधन और रख-रखाव

किसी प्रयोगशाला को सुचारु रूप से चलाने के लिए, विविध प्रकार की सामग्री की आवश्यकता होती है। परंतु सामग्री की मात्रा उस स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या पर निर्भर करती है।

किसी प्रयोगशाला में सामग्री के प्रबंधन और रख-रखाव के लिए, निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए-

1. यंत्रों, उपकरणों, क्रियाकलापों तथा सामग्री की सूची गणित के पाठ्यक्रम में सम्मिलित प्रयोगों के अनुसार तैयार की जानी चाहिए।
2. सामग्री की गुणवत्ता की जाँच करने तथा दरों की तुलना करने के लिए, गणित शिक्षकों का एक समूह एजेन्सियों या दुकानों का भ्रमण कर सकता है। इससे अच्छी गुणवत्ता वाली सामग्री उपयुक्त दरों पर प्राप्त करने में सहायता मिल सकेगी।
3. प्रयोगशाला के लिए आवश्यक सामग्री को समय-समय पर जाँच करते रहना चाहिए। यदि कुछ सामग्री या अन्य उपभोग में आने वाली वस्तुएँ खत्म हो गई हैं, तो उनके मंगाने के लिए आर्डर दे दिया जाना चाहिए।
4. प्रयोगशाला कर्मी द्वारा यंत्रों, सयंत्रों और उपकरणों की नियमित रूप से जाँच करते रहना चाहिए। यदि किसी यंत्र/सयंत्र की मरम्मत की आवश्यकता हो, तो इसे तुरंत करा लेना चाहिए। यदि किसी कल-पुर्जे को बदलना हो, तो इसके लिए आर्डर दे देना चाहिए।
5. सभी यंत्रों, सयंत्रों, उपकरणों इत्यादि को प्रयोगशाला में किसी अल्मारी/कपबोर्ड में अथवा किसी पृथक स्टोर रूम में रखना चाहिए।

उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित प्रयोगशाला के लिए सयंत्र (वस्तुएँ)

क्योंकि विद्यार्थी शिक्षक के मार्गदर्शन के अंतर्गत अनेक मॉडल बनाने के क्रियाकलापों में व्यस्त रहेंगे, गणित प्रयोगशाला का सुचारु रूप से चलना इस बात पर निर्भर करेगा कि विविध वस्तुओं जैसे कि डोरियाँ और धागे, सेलोटेप, सफ़ेद कागज़, कार्डबोर्ड, हार्डबोर्ड, सुइयाँ और पिन, ड्राइंग पिन, सैंडपेपर, चिमटियाँ, स्क्रू-ड्राइवर्स (पेचकस), विभिन्न रंगों के रबर बैंड, गोंद लगे हुए कागज़ और लेबल (चेपियाँ), वर्गांकित कागज़, प्लाईवुड, कैंची, आरी, पेंट, टाँका लगाने के लिए सामग्री, रांगे का तार, स्टील का तार, रूई, ऊन, टिन और प्लास्टिक की शीटें (चादर), चिकना कागज़ (ग्लेज्ड पेपर), इत्यादि की आपूर्ति ठीक प्रकार से होती रहे। इनके अतिरिक्त शिक्षक द्वारा विद्यार्थियों के सम्मुख कुछ गणितीय अवधारणाओं, तथ्यों और गुणों को प्रदर्शित करने के लिए, एक अच्छी टिकाऊ सामग्री से बने हुए कुछ मॉडल, चार्ट, स्लाइड, इत्यादि भी यहाँ होने चाहिए। विभिन्न सारणियाँ (तालिकाएँ), रेडी-रेकोनर (लेमीनेटेड रूप में) भी यहाँ होने चाहिए ताकि विद्यार्थी इनका विभिन्न कार्यों में उपयोग कर सकें। साथ ही, कुछ ऐसे क्रियाकलापों को करने के लिए, जैसे कि मापना, खींचना, परिकलन करना, संदर्भ पुस्तकों को पढ़ना, इत्यादि, प्रयोगशाला में गणितीय यंत्र, कैलकुलेटर, कंप्यूटर, पुस्तकें, जरनल, गणितीय शब्दकोश जैसी वस्तुएँ भी होनी चाहिए। उपरोक्त को दृष्टिगत रखते हुए, प्रयोगशाला के लिए सुझावित यंत्रों/मॉडलों की सूची निम्नलिखित है-

संयत्र

गणितीय यंत्र सेट (प्रदर्शन के लिए बड़ा ज्यामिति बॉक्स जिसमें लकड़ी से बने रूलर (पटरी), सेट-स्क्वायर, डिवाइडर, चाँदा और परकार हों), कुछ ज्यामिति बॉक्स, 100cm, 50cm और 30 cm वाले मीटर स्केल, नापने का फीता, विकर्ण स्केल, क्लिनोमीटर, कैलकुलेटर, संबंधित सॉफ्टवेयर सहित कंप्यूटर इत्यादि।

मॉडल

- समुच्चय
- रेखीय फलनों द्वारा द्विघातीय फलनों का प्रदर्शन
- श्रेढ़ी और श्रेणियाँ
- पास्कल का त्रिभुज
- समांतर श्रेढ़ी
- शंकु परिच्छेद
- वर्धमान एवं ह्रासमान फलन

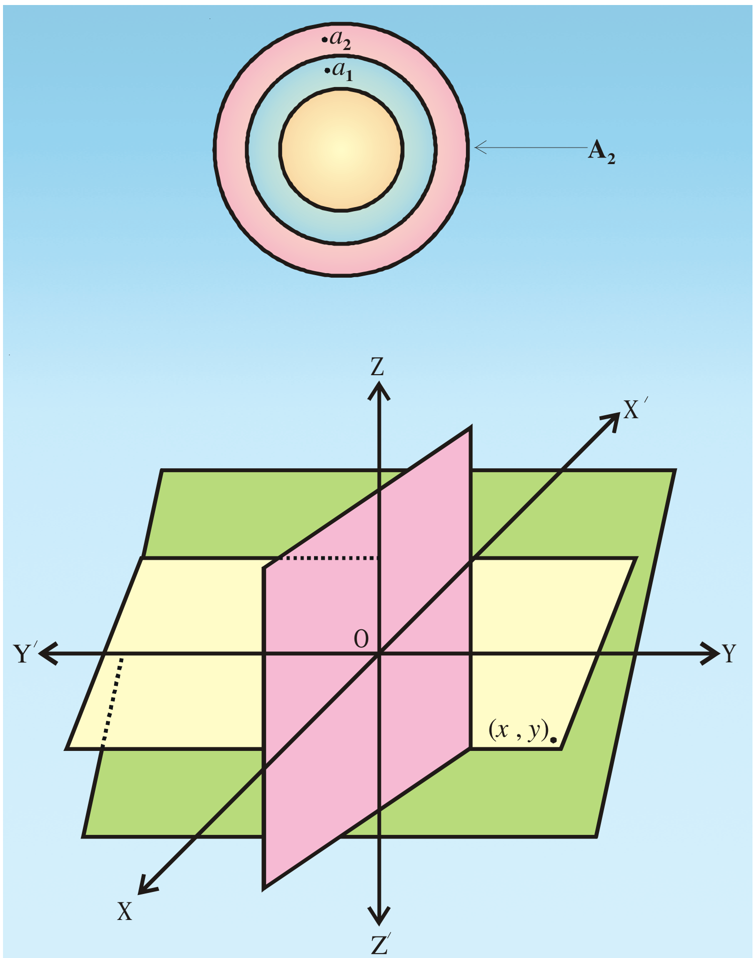
- उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ एवं नत परिवर्तन बिंदु
- लैग्रैन्ज प्रमेय
- रोली प्रमेय
- योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल
- सदिशों द्वारा अर्धवृत्त में समकोण
- परवलय की संरचना जब इसकी नियता और नाभि के बीच की दूरी दी गई हो
- दीर्घवृत की संरचना जब इसके दीर्घ एवं लघु अक्ष दिए गए हों
- सदिशों के सदिश एवं अदिश गुणनफलों का ज्यामितीय निरूपण
- एक नियत बिंदु से गुजरती तथा दिए गए सदिश के समांतर किसी सीधी रेखा का समीकरण
- तल का समीकरण
- दो तलों के बीच का कोण
- दो तलों के बीच के कोण का किसी अन्य तल द्वारा विभाजन

स्टेशनरी और विविध वस्तुएँ

विभिन्न रंगों के रबर बैंड, विभिन्न रंगों के कंचे, ताशों की एक गड्डी, आलेख कागज़/वर्गीकृत कागज़, बिंदुकित कागज़, ड्राइंगपिन, रबड़, पेंसिल, स्कैच पेन, सेलोटेप, विभिन्न रंगों के धागें, चिकने कागज़ (ग्लेज्ड पेपर), पतंग का कागज़, ट्रेसिंग पेपर, गोंद, पिन, कैंची और कटर, हथौड़ा, आरी, थर्मोकोल की शीटें, सैंड पेपर, विभिन्न मापों की कीलें तथा स्क्रू (पेंच), स्क्रू ड्राइवर्स, कलपुर्जों के सेट सहित छेद करने वाली मशीन और चिमटियाँ।

कक्षा 11 के लिए

क्रियाकलाप



Mathematics is one of the most important cultural components of every modern society. Its influence a other cultural element has been so fundamental and wide-spread as to warrant the statement that her "most modern" ways of life would hardly have been possilbly without mathematics. Appeal to such obvious examples as electronics ratio, television, computing machines, and space travel. So substantiate this statement is unnecessary : the elementary art of calculating is evidence enough. Imagine trying to g et through three day without using numbers in some fashion or other!

– R.L. Wilder

क्रियाकलाप 1

उद्देश्य

एक दिए हुए समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात करना तथा यह सत्यापित करना कि यदि एक समुच्चय में n अवयव हैं तो कुल उपसमुच्चयों की सख्या 2^n है।

आवश्यक सामग्री

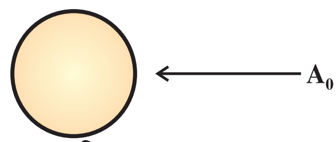
कागज़, विभिन्न रंगों की पेंसिलें

रचना की विधि

1. एक रिक्त समुच्चय (माना) A_0 लीजिए जिसमें कोई भी अवयव नहीं है।
2. एक समुच्चय (माना) A_1 लीजिए जिसमें केवल एक अवयव (माना) a_1 है।
3. एक समुच्चय (माना) A_2 लीजिए जिसमें दो अवयव (माना) a_1 और a_2 हैं।
4. एक समुच्चय (माना) A_3 लीजिए जिसमें तीन अवयव (माना) a_1, a_2 और a_3 हैं।

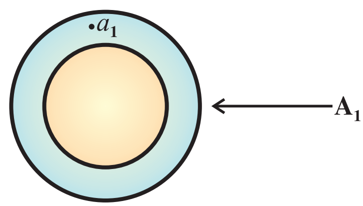
प्रदर्शन

1. A_0 को आकृति 1.1 की तरह दिखाइए यहाँ A_0 के संभव अपसमुच्चय केवल A_0 ही है जिसे चिह्न ϕ द्वारा निरूपित किया जाता है। A के उपसमुच्चयों की संख्या $1 = 2^0$ है।



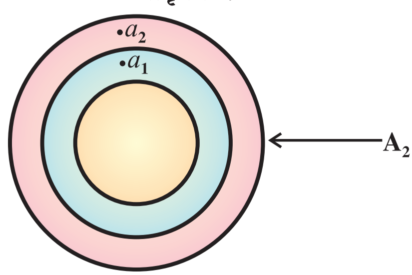
आकृति 1.1

2. A_1 को आकृति 1.2 की तरह निरूपित कीजिए। यहाँ A_1 के उपसमुच्चय ϕ, $\{a_1\}$ है। A_1 के उपसमुच्चयों की संख्या $2 = 2^1$ है।



आकृति 1.2

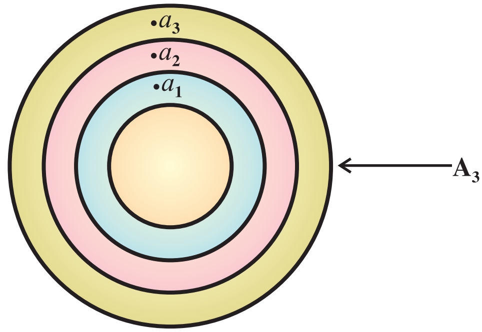
3. A_2 को आकृति 1.3 की तरह दर्शाइए। यहाँ A_2 के उपसमुच्चयों की संख्या ϕ, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$ है। A_2 के उपसमुच्चयों की संख्या $4 = 2^2$ है।



आकृति 1.3

4. A_3 को आकृति 1.4 की तरह दर्शाइए यहाँ A_3 के उपसमुच्चय ϕ, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_3, a_1\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$ है। A_3 के उपसमुच्चयों की संख्या $8 = 2^3$ है।

5. इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए, एक अवयवों $a_1, a_2, ..., a_n$ वाले समुच्चय A के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n है।



आकृति 1.4

प्रेक्षण

1. A_0 के उपसमुच्चयों की संख्या ___________ = $2^{\square}$ है।
2. A_1 के उपसमुच्चयों की संख्या ___________ = $2^{\square}$ है।
3. A_2 के उपसमुच्चयों की संख्या ___________ = $2^{\square}$ है।
4. A_3 के उपसमुच्चयों की संख्या ___________ = $2^{\square}$ है।
5. A_{10} के उपसमुच्चयों की संख्या = $2^{\square}$ है।
6. A_n के उपसमुच्चयों की संख्या = $2^{\square}$ है।

क्रियाकलाप 2

उद्देश्य

सत्यापित करना कि दो समुच्चयों A और B के लिए n (A×B) = pq तथा A से B के बीच संबधों की संख्या 2^{pq} है जहाँ $n(A) = p$ और $n(B) = q$ है।

आवश्यक सामग्री

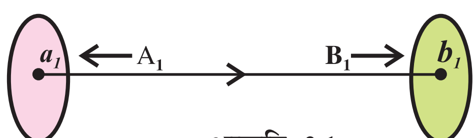
कागज़, विभिन्न रंगों की पेंसिलें

रचना की विधि

1. एक समुच्चय A_1 लीजिए जिसमें केवल अवयव (माना) a_1 है तथा एक दूसरा समुच्चय B_1 लीजिए जिसमे केवल एक अवयव (माना) b_1 है।
2. एक समुच्चय A_2 लीजिए जिसमें केवल दो अवयव माना a_1 और a_2 है तथा एक दूसरा समुच्चय B_3, लीजिए जिसमे केवल तीन अवयव b_1, b_2 और b_3 है।
3. एक समुच्चय A_3 लीजिए जिसमें केवल तीन अवयव (माना) a_1, a_2 और a_3 है तथा एक दूसरा समुच्चय B_4 लीजिए जिसमें के चार अवयव है b_1, b_2, b_3 और b_4 हैं।
4. एक समुच्चय A_4 लीजिए जिसमें केवल चार अवयव a_1, a_2, a_3, और a_4 है तथा एक दूसरा समुच्चय B_4 लीजिए जिसमें केवल चार अवयव b_1, b_2, b_3 और b_4 है।

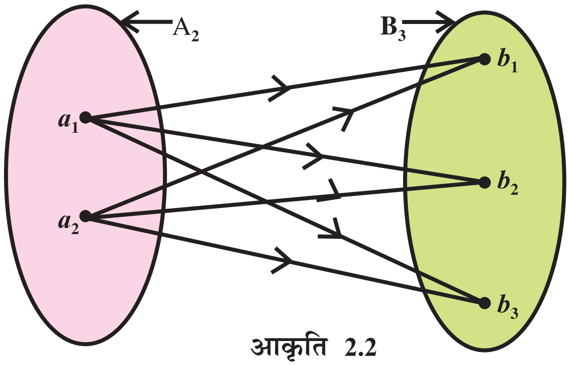
प्रदर्शन

1. समुच्चय A_1 के अवयवों से समुच्चय B_1 के अवयवों की सभी संगतियों (Correspondence) को आकृति 2.1 की भाँति निरूपित कीजिए।



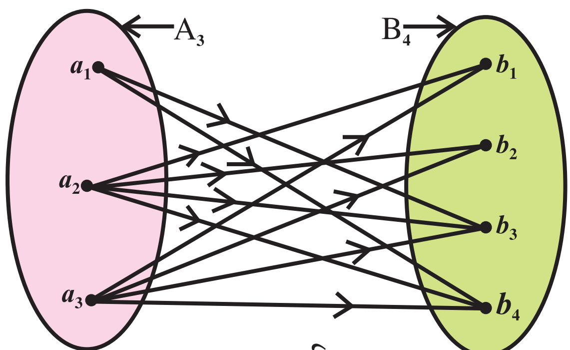
आकृति 2.1

2. समुच्चय A_2 के अवयवों से समुच्चय B_3 के अवयवों के बीच सभी संगतियों को आकृति 2.2 की भाँति दर्शाइए।



आकृति 2.2

3. समुच्चय A_3 के अवयवों से समुच्चय B_4 के अवयवों के बीच सभी संगतियों को आकृति 2.3 की भाँति दर्शाइए।



आकृति 2.3

4. इसी प्रकार की संगतियों को दिए गए दो समुच्चयों A और B के अवयवों के बीच दर्शाया जा सकता है।

प्रेक्षण

1. तीर संकेतों (arrows) की संख्या दो समुच्चयों A_1 और B_1 के कार्तीय गुणन $A_1 \times B_1$ के अवयवों की संख्या _ × _ हैं और उनके बीच संबंधों की संख्या $2^{\square}$ है।

2. तीर संकेतों की संख्या अर्थात दो समुच्चयों A_2 और B_3 के कार्तीय गुणन $(A_2 \times B_3)$ के अवयवों की संख्या _ × _ है और उनके बीच संबंधों की संख्या $2^{\square}$ है।

3. तीर संकेतों की संख्या अर्थात दो समुच्चयों A_3 और B_4 के कार्तीय गुणन $(A_3 \times B_4)$ के अवयवों की संख्या _ × _ है और उनके बीच संबंधों की संख्या $2^{\square}$ है।

टिप्पणी

इस परिणाम को अन्य समुच्चयों A_4, A_5, ..., A_p, जिनमें क्रमशः 4, 5,..., p, अवयव हैं और समुच्चयों B_5, B_6, ..., B_q जिनमें क्रमशः 5, 6,..., q अवयव हैं, को लेकर सत्यापित किया जा सकता है। अधिक स्पष्ट रूप में हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि यदि समुच्चय A में p अवयव है तथा समुच्चय B में q अवयव है तब A से B में सभी संबंधों की संख्या 2^{pq}, है जहाँ $n(A \times B) = n(A)\, n(B) = pq$ है।

क्रियाकलाप 3

उद्देश्य

वेन डाइग्राम के उपयोग से समुच्चय संबंधित संक्रियाओं का निरूपण।

आवश्यक सामग्री

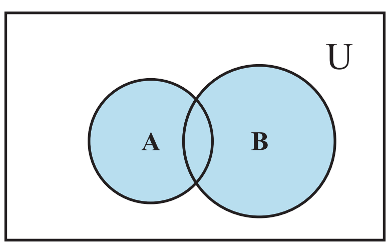
हार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़ की मोटी शीट, पेंसिल, रंग, कैंची, गोंद

रचना की विधि

1. सफ़ेद कागज़ की शीट से आयताकार टुकड़े काट कर कठोर तख्ते में चिपका दीजिए। प्रत्येक आयताकार शीट (टुकड़े) के दाईं और ऊपरी किनारे पर चिह्न U लिखिए।
2. प्रत्येक आयताकार शीट में दो वृत्त A और B बनाइए और आकृति 3.1 से 3.10 में दिखाए अनुसार रंग भरिए।

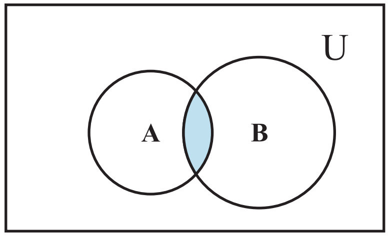
प्रदर्शन

1. U आयत समष्टीय समुच्चय (universal set) निरूपित करता है।
2. वृत्त A और B समष्टीय समुच्चय U के उपसमुच्चयों को निरूपित करते है।
3. A' समुच्चय A का पूरक (कॉम्पलीमेंट) समुच्चय तथा B' समुच्चय B के पूरक समुच्चय को निर्दिष्ट करता है।
4. आकृति 3.1 $A \cup B$ को निरूपित करता है।



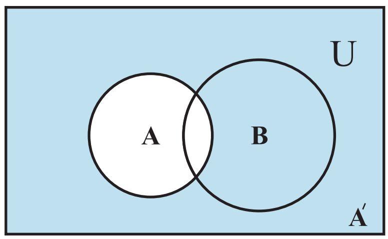
आकृति 3.1

5. आकृति 3.2. में रंगीन भाग $A \cap B$ को दर्शाता है।



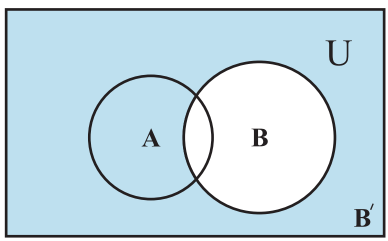
आकृति 3.2

6. आकृति 3.3 में रंगीन भाग A' को दर्शाता है।



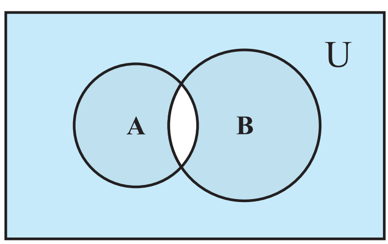
आकृति 3.3

7. आकृति 3.4 में रंगीन भाग B' को निरूपित करता है।



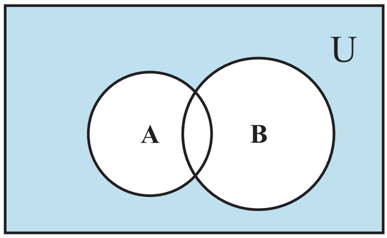
आकृति 3.4

8. आकृति 3.5 में रंगीन भाग $(A \cap B)'$ को निरूपित करता है।



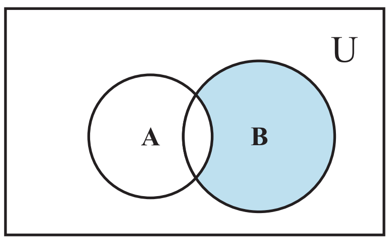
आकृति 3.5

9. आकृति 3.6 में रंगीन भाग $(A \cup B)'$ को निरूपित करता है।



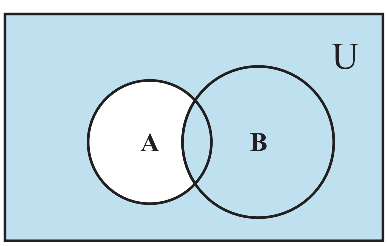
आकृति 3.6

10. आकृति 3.7 में रंगीन भाग $A' \cap B$ को निरूपित करता है जो कि $B - A$ ही है



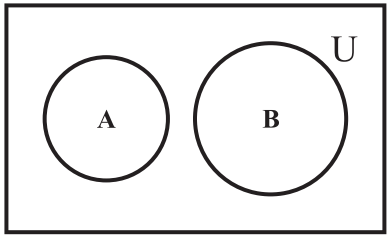
आकृति 3.7

11. आकृति 3.8 में रंगीन भाग $A' \cup B$ को निरूपित करता है।



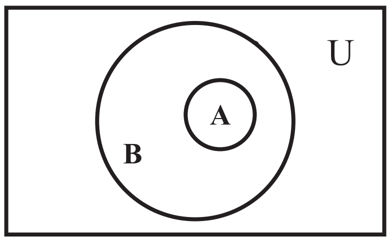
आकृति 3.8

12. आकृति 3.9 दर्शाता है कि $A \cap B = \phi$



आकृति 3.9

13. आकृति 3.10 दर्शाता है कि $A \subset B$



आकृति 3.10

प्रेक्षण

1. आकृति 3.1 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
2. आकृति 3.2 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
3. आकृति 3.3 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
4. आकृति 3.4 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
5. आकृति 3.5 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
6. आकृति 3.6 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
7. आकृति 3.7 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
8. आकृति 3.8 में रंगीन भाग ________________ निरूपित करता है।
9. आकृति 3.9 दर्शाती है कि $(A \cap B) =$ ________________
10. आकृति 3.10 दर्शाती है कि A ________________ B.

अनुप्रयोग

वेन चित्रण (डाइग्राम) का प्रयोग तर्क (Logic) तथा गणित में होता है।

क्रियाकलाप 4

उद्देश्य–

समुच्चयों A, B तथा C के लिए वितरणात्मक गुण अर्थात $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ को सत्यापित करना।

आवश्यक सामग्रीः

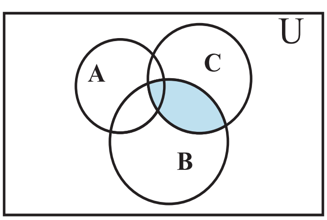
हार्डबोर्ड, कागज़ की सफ़ेद मोटी शीट, पेंसिल, रंग, कैंची, गोंद

रचना की विधि–

1. कागज़ की शीट से पाँच आयताकार टुकड़े काट कर उन्हे गत्ते में इस प्रकार चिपकाइए कि तीन आयत क्षैतिज रेखा में हो तथा शेष दो आयतों को उनके नीचे क्षैतिज रेखा में रख कर चिपकाइए। प्रत्येक आयत के दायीं ओर ऊपरी भाग में चिह्न U, जैसा कि आकृतियों 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 और 4.5 में दिखाया गया है, लिखिए
2. प्रत्येक आयत में तीन वृत्त खींचिए तथा उन्हें A, B और C से चिह्नित कीजिए जैसा कि आकृतियों में दिखाया गया है।
3. आकृतियों में दिखाए गए अनुसार भागों में रंग भरिए या छायांकित कीजिए।

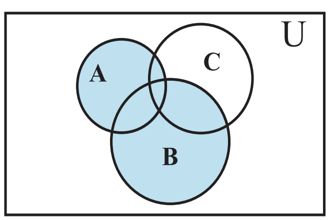
प्रदर्शन

1. प्रत्येक आकृति में U, आयत द्वारा निरूपित समष्टीय समुच्चय (universal set) को दर्शाता है।
2. वृत्त A, B और C, युनिर्वसल सेट U के उपसमुच्चयों को निरूपित करते हैं।



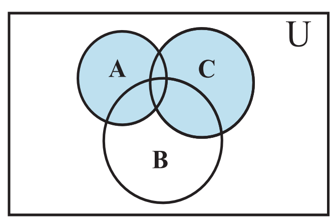
$B \cap C$

आकृति 4.1



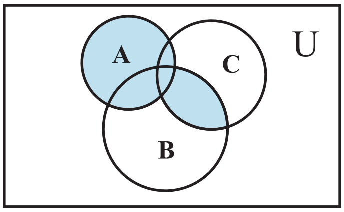
$A \cup B$

आकृति 4.2



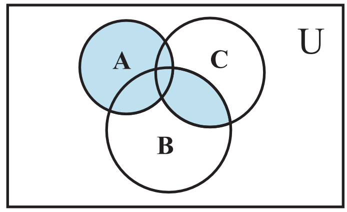
$A \cup C$

आकृति 4.3



$A \cup (B \cap C)$

आकृति 4.4



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

आकृति 4.5

3. आकृति 4.1 में रंगीन/छायांकित भाग $B \cap C$ को निरूपित करता है, आकृति 4.2 में रंगीन भाग $A \cup B$ को निरूपित करता है, आकृति 4.3 में $A \cup C$ को, आकृति 4.4 में $A \cup (B \cap C)$ को और आकृति 4.5 में रंगीन भाग $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ को निरूपित करता है।

प्रेक्षण

1. आकृति 4.1 में रंगीन भाग ____________को निरूपित करता है।
2. आकृति 4.2, में रंगीन भाग ____________को निरूपित करता है।
3. आकृति 4.3, में रंगीन भाग ____________को निरूपित करता है।
4. आकृति 4.4, में रंगीन भाग ____________को निरूपित करता है।
5. आकृति 4.5, में रंगीन भाग ____________को निरूपित करता है।
6. आकृतियों 4.4 और 4.5 में उभयनिष्ठ रंगीन भाग ___________है।
7. $A \cup (B \cap C) =$ _____________

इस प्रकार, वितरण नियम का सत्यापन हो गया।

अनुप्रयोग

समुच्चय संक्रियाओं में वितरण गुण धर्म को समुच्चयों पर आधारित समस्याओं को सरल करने में प्रयोग करते है।

टिप्पणी

इसी प्रकार दूसरे वितरण नियम

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

का भी सत्यापन किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 5

उद्देश्य

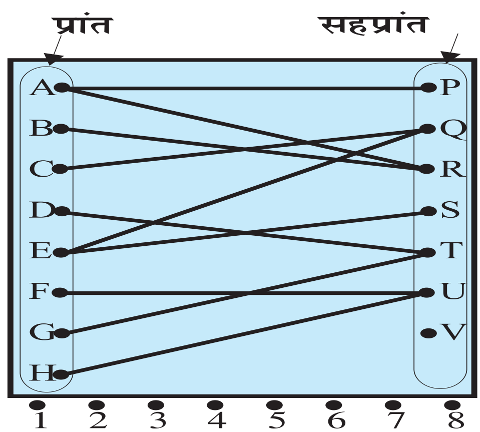
संबंध और फलन की पहचान करना।

आवश्यक सामग्री

हार्डबोर्ड या बोर्ड, बैटरी, दो भिन्न रंगों के बल्ब, परीक्षण पेंच, टेस्टर, बिजली के तार तथा स्विच

रचना की विधि

1. एक उपयुक्त आकार का हार्डबोर्ड लीजिए और उसके ऊपर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. बोर्ड के बाईं ओर आठ छेद कीजिए और उन पर A, B, C, D, E, F, G और H का निशान लगाइए जैसा कि आकृति 5.1 में दिखाया गया है।
3. बोर्ड के दाईं ओर एक स्तंभ में सात छेद कीजिए और उन पर P, Q, R, S, T, U और V लिखिए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।
4. एक ही रंग के बल्बों को छेदों A, B, C, D, E, F, G और H में लगाइए



आकृति 5

5. दूसरे रंग के बल्बों को छेदों P, Q, R, S, T, U और V में लगाइए
6. परीक्षण पेंचों को बोर्ड के नीचे जहाँ–जहाँ 1, 2, 3, ..., 8 लिखा है, वहाँ पर लगाइए।
7. विद्युत (बिजली) परिपथ को इस प्रकार पूरा कीजिए कि प्रत्येक स्तंभ के एक–एक बल्बों का युग्म एक साथ जलें (उद्दीप्त हों)
8. इन बल्बों के युग्म, क्रमित युग्म एक संबंध बनाएँगे जो एक फलन हो भी सकता है या नही भी हो सकता है।

प्रदर्शन

1. बाएँ स्तंभ में बल्ब A, B, ..., H प्रांत (Domain) को निरूपित करते हैं और दाएँ स्तंभ के बल्ब P, Q, R, ..., V सहप्रांत (co-domain) को निरूपित करते हैं।
2. दिए गए आठ पेंचों में से दो या अधिक जाँच के पेंचों का प्रयोग करके विभिन्न क्रमित युग्म प्राप्त कीजिए। आकृति 5.1 में सभी आठ पेंचों का उपयोग विभिन्न क्रमित युग्मों जैसे (A, P), (B, R), (C, Q) (A, R), (E, Q) इत्यादि को प्राप्त करने के लिए किया गया है।
3. अलग-अलग क्रमित युग्मों को चुन कर क्रमित युग्मों के विभिन्न समुच्चयों को बनाइए।

प्रेक्षण

1. आकृति 5 में क्रमित युग्म __________हैं।
2. ये क्रमित युग्म एक ________ बनाते हैं।
3. क्रमित युग्म (A, P), (B, R), (C, Q), (E, Q), (D, T), (G, T), (F, U), (H, U) एक संबंध बनाते हैं जो एक ______ भी हैं।
4. क्रमित युग्म (B, R), (C, Q), (D, T), (E, S), (E, Q) एक ______ बनाते हैं जो एक ______ नही हैं।

अनुप्रयोग

इस कार्यकलाप को संबंध या फलन की संकल्पना को समझाने में उपयोग किया जा सकता है। इसका उपयोग एकैकी (one-one) तथा आच्छादक फलनों की संकल्पना को समझाने में भी किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 6

उद्देश्य

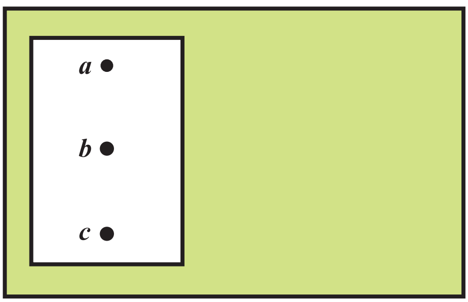
संबंध और फलन में अंतर ज्ञात करना

आवश्यक सामग्री

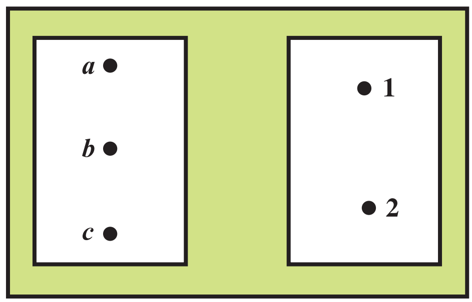
ड्राइंग बोर्ड, रंगीन कागज़, कैंची, चिपकाने का सामान (गोंद), सुतली, कीलें इत्यादि।

रचना की विधि–

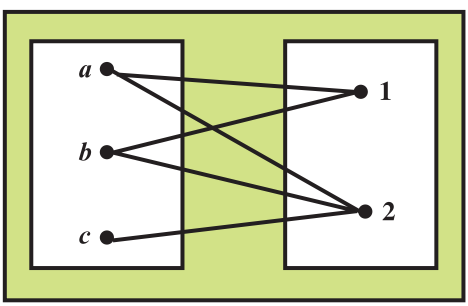
1. एक ड्राइंग बोर्ड या सुविधाजनक आकार का प्लाइवुड का टुकड़ा लीजिए और उस पर एक रंगीन कागज़ चिपकाइए।
2. एक सफ़ेद ड्राइंग-शीट लीजिए और 6 cm × 4 cm आकार की आयताकार पट्टी काट कर ड्राइंग बोर्ड पर चिपकाइए (देखिए आकृति 6.1)



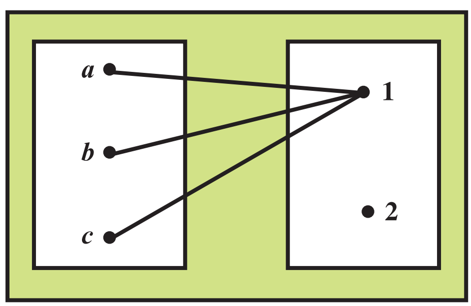
आकृति 6.1



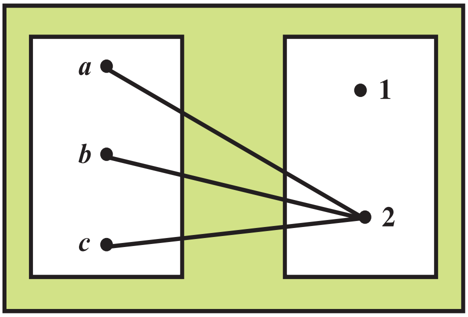
आकृति 6.2



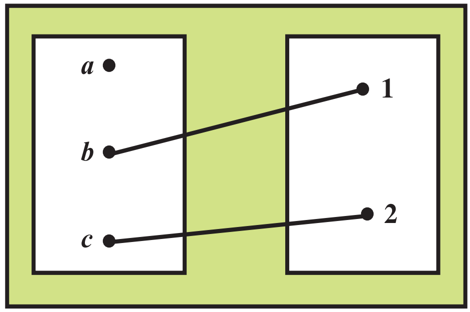
आकृति 6.3



आकृति 6.4



आकृति 6.5



आकृति 6.6

3. इस पट्टी पर तीन कीलें लगाइए और उन पर *a, b, c* अंकित कीजिए (देखिए आकृति 6.1)
4. 6 cm × 4 cm की एक दूसरी सफ़ेद आयताकार पट्टी काट कर ड्राइंग बोर्ड के दाईं ओर चिपकाइए।
5. इस पट्टी पर दो कीलें लगाइए और उन्हें 1 और 2 से अंकित कीजिए (देखिए आकृति 6.2)

प्रदर्शन

1. बाईं ओर की कीलों को सुतली द्वारा दाईं ओर की कीलों से विभिन्न प्रकार से जोड़िए जैसा आकृति 6.3 से आकृति 6.6 तक दिखाया गया है।
2. प्रत्येक आकृति में कीलों के ज़ोडने से अलग-अलग क्रमिक युग्म बनते हैं।

प्रेक्षण

1. आकृति 6.3 में क्रमिक युग्म ______________हैं। ये क्रमिक युग्म एक _________ बनाते है परंतु एक __________नहीं बनाते हैं।
2. आकृति 6.4 में क्रमिक युग्म ___________ हैं। यह एक ________ तथा साथ ही एक _________बनाते हैं।
3. आकृति 6.5 में क्रमिक युग्म ________ हैं। ये क्रमिक युग्म एक _________ के साथ-साथ एक _________भी बनाते हैं।
4. आकृति 6.6 में क्रमिक युग्म _________ हैं। ये क्रमिक युग्म एक ________ को निरूपित नही करते हैं परंतु एक _________ निरूपित करते हैं।

अनुप्रयोग

ऐसे क्रियाकलापों का उपयोग बाई ओर की कीलों को दाई ओर की कीलों से उपयुक्त तरीके से जोड़ कर विभिन्न प्रकार के फलनों जैसे अचर फलन, तत्समक एकेकी और आच्छादी फलनों को प्रदर्शित करने के लिए किया जा सकता है।

टिप्पणी

उपर्युक्त कार्यकलाप में कीलों को कुछ अलग प्रकार से जोड़ा गया है। विद्यार्थी इन्हें किसी अन्य प्रकार से जोड़ कर कुछ और भिन्न प्रकार के संबंध प्राप्त कर सकते हैं। विभिन्न प्रकार के संबंधो और फलनों को निरूपित करने के लिए दोनों ओर की कीलों की संख्या में परिवर्तन किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 7

उद्देश्य

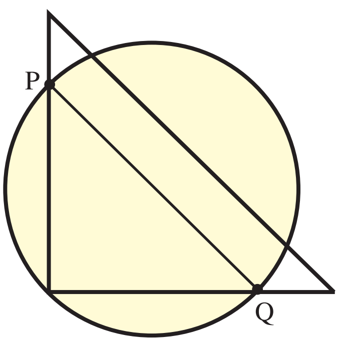
एक कोण के डिग्री माप तथा रेडियन माप में संबंध ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

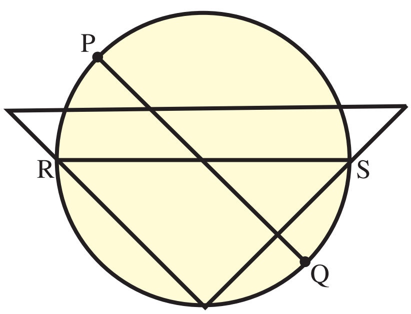
चूड़ी, ज्यामिति बाक्स, प्रोट्रेक्टर (चांदा), डोरा, चिह्निक (marker), गत्ता, सफ़ेद कागज़।

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक गत्ता लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. सफ़ेद कागज़ पर चूड़ी की सहायता से एक वृत्त बनाइए।
3. सेट-स्क्वेयर लेकर उसे दो भिन्न स्थितियों में रख कर वृत्त के व्यास PQ और RS ज्ञात कीजिए जैसा कि आकृति 7.1 और आकृति 7.2 में दिखाया गया है।

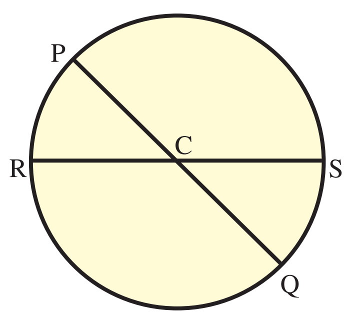


आकृति 7.1



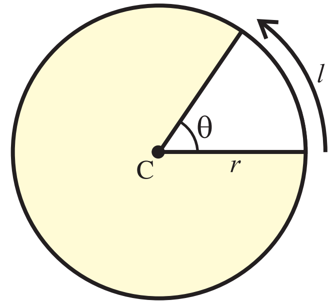
आकृति 7.2

4. माना PQ और RS बिंदु C पर प्रतिच्छेद करते हैं। बिंदु C वृत्त का केंद्र होगा। (आकृति 7.3)
5. स्पष्टत: CP = CR = CS = CQ = वृत्त की त्रिज्या



आकृति 7.3

प्रदर्शन



आकृति 7.4

1. माना वृत्त की त्रिज्या r है और चाप l जो केंद्र C पर कोण θ बनाता है जैसा कि आकृति 7.4. में दिखाया गया है,

   $\theta = \frac{l}{r}$ रेडियन।

2. यदि डिग्री माप $\theta = \frac{l}{2\pi r} \times 360$ डिग्री

   तब $\frac{l}{r}$ रेडियन $= \frac{l}{2\pi r} \times 360$ डिग्री

   या 1 रेडियन $= \frac{180}{\pi}$ डिग्री $= 57.27$ डिग्री

प्रेक्षण

डोरे के प्रयोग से चापों RP, PS, RQ, QS की लंबाइयाँ मापिए और इनको नीचे दी गई सारणी में प्रविष्ट कीजिए।

क्र. सख्या	चाप	चाप की लंबाई (l)	वृत्त की त्रिज्या	रेडियन माप
1.	$\overset{\frown}{RP}$	--------	--------	$\angle RCP = \frac{\overset{\frown}{RP}}{r} =$ __
2.	$\overset{\frown}{PS}$	--------	--------	$\angle PCS = \frac{\overset{\frown}{PS}}{r} =$ __
3.	$\overset{\frown}{SQ}$	--------	--------	$\angle SCQ = \frac{\overset{\frown}{SQ}}{r} =$ __
4.	$\overset{\frown}{QR}$	--------	--------	$\angle QCR = \frac{\overset{\frown}{QR}}{r} =$ __

2. प्रोट्रेक्टर की सहायता से कोणों को डिग्री में मापिए तथा दी गई सारणी को पूरा कीजिए।

कोण	डिग्री माप	रेडियन माप	अनुपात $= \frac{\text{डिग्री माप}}{\text{रेडियन माप}}$
$\angle$ RCP	-------	-------	-------
$\angle$ PCS	-------	-------	-------
$\angle$ QCS	-------	-------	-------
$\angle$ QCR	-------	-------	-------

3. एक रेडियन का मान _________ डिग्री के बराबर है।

अनुप्रयोग

यह परिणाम त्रिकोणमितीय फलनों के अध्ययन में उपयोगी है।

क्रियाकलाप 8

उद्देश्य

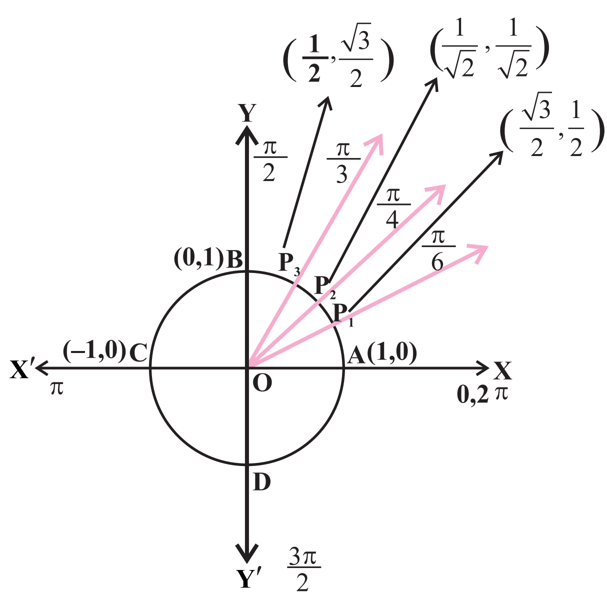
प्रथम चतुर्थांश में साइन (sine) और कोसाइन (cosine) के मानों का प्रयोग करके दूसरे, तीसरे और चौथे चतुर्थांश में उनके मान ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

गत्ता, सफ़ेद चार्ट पेपर, रूलर, रंगीन पेन, गोंद, लोहे के तार और सुई

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक गत्ता लीजिए और उसके ऊपर सफ़ेद चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. चार्ट पेपर पर एकक त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए जिसका केंद्र O है।
3. केंद्र से दो लम्बवत् रेखाएँ X′OX और YOY′ क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष को निरूपित करने वाली रेखाएँ खींचिए जैसा आकृति 8.1 में दिखाया गया है।



आकृति 8.1

4. जहाँ वृत्त x–अक्ष और y–अक्ष को काटता है उन बिदुओं को A, B, C, D से अंकित कीजिए जैसा आकृति 8.1 में दिखाया गया है।

5. बिंदु O से कोण P_1OX, P_2OX, और P_3OX बनाइए जिनके माप क्रमशः $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{3}$ हैं।

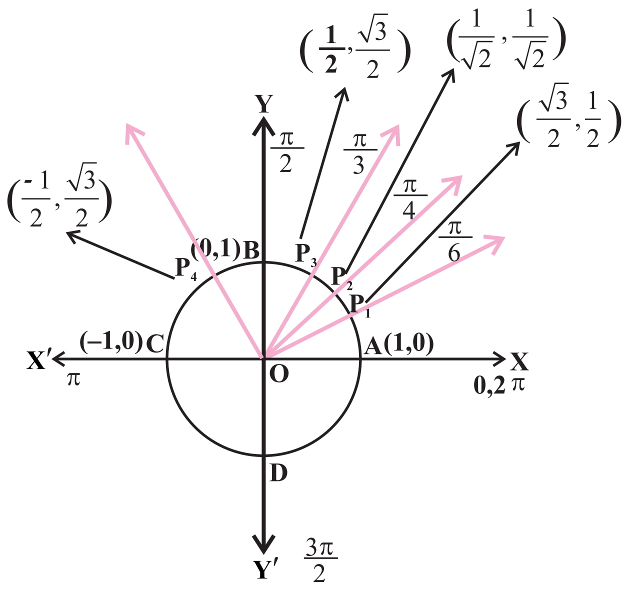
6. एकक इकाई की एक सुई लीजिए। इसके एक सिरे को वृत्त के केंद्र पर, इस प्रकार स्थिर कीजिए कि दूसरा सिरा स्वतंत्र रूप से वृत्त के अनुदिश घूम सके।

प्रेक्षण

1. बिंदु P_1 के निर्देशांक $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right)$ हैं क्योंकि इसका x-निर्देशांक $\cos\frac{\pi}{6}$ और y-निर्देशांक $\sin\frac{\pi}{6}$ है। बिंदुओं P_2 और P_3 के निर्देशांक क्रमशः $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ और $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ हैं।

2. दूसरे चतुर्थांश में किसी कोण (माना) $\frac{2\pi}{3}$ के साइन और कोसाइन मान को ज्ञात करने के लिए सुई को घड़ी की विपरीत दिशा (वामावर्त) में घुमाइए जिससे x–अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण P_4OX का माप $\frac{2\pi}{3} =$ 120º हो।

3. आकृति 8.2 में सुई की स्थिति OP_4 देखिए क्योंकि $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ है, इसलिए OP_4, y–अक्ष के सापेक्ष



आकृति 8.2

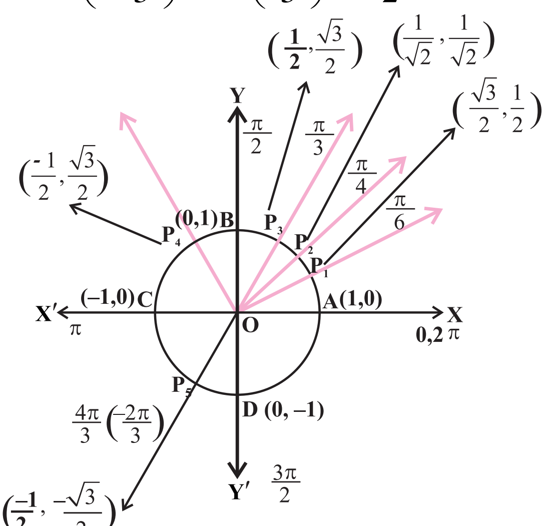
OP_3 का दर्पण प्रतिबिंब है। इसलिए P_4 के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ है। अतः $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ है।

4. तीसरे चतुर्थांश में कुछ कोणों जैसे $\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$, अर्थात $\frac{-2\pi}{3}$ (माना) के साइन या कोसाइन के मान ज्ञात करने के लिए सुई को घड़ी की विपरीत दिशा में इस प्रकार घुमाइए कि वह x-अक्ष की धनात्मक दिशा से $\frac{4\pi}{3}$ का कोण बनाए।

5. जैसा कि आकृति 8.3 में दिखाया गया है, सुई की नई स्थिति OP_5 को देखिए। बिंदु P_5, x-अक्ष के सापेक्ष बिंदु P_4 का दर्पण प्रतिबिंब है (क्योंकि $\angle P_4OX' = P_5OX'$)। इसलिए P_5 के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ हैं।

$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)= \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ और } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}.$$

6. साइन और कोसाइन के चौथे चतुर्थांश मे किसी कोण जैसे $\frac{7\pi}{4}$ के मान ज्ञात करने के लिए सुई को वामावर्त (घड़ी की विपरीत दिशा में) इतना घुमाइए कि वह x-अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण $\frac{7\pi}{4}$ बनाए जिसकी स्थिति OP_6 द्वारा निरूपित की गई है जैसा कि आकृति 8.4 में दिखाया



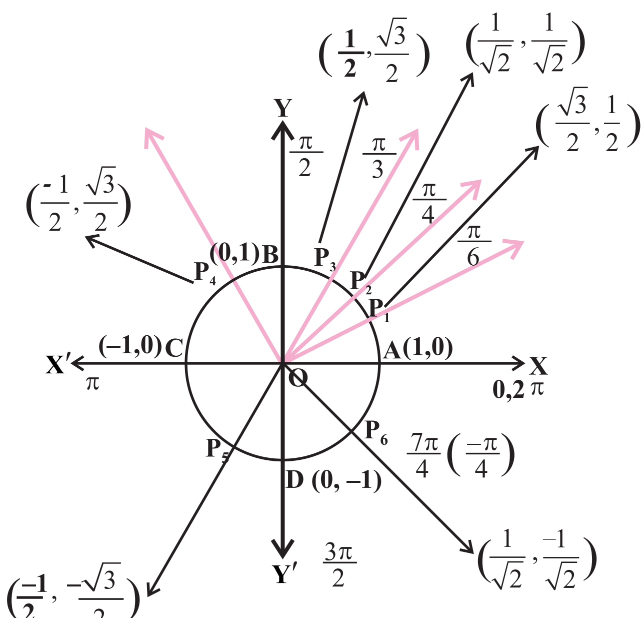
आकृति 8.3

गया है। वामावर्त दिशा में $\frac{7\pi}{4}$ का कोण = दक्षिणावर्त दिशा में $-\frac{\pi}{4}$ का कोण आकृति 8.4 से P_6, x–अक्ष के सापेक्ष P_2 का दर्पण प्रतिबिंब है। इसलिए P_4 के निर्देशांक $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ हैं।

इस प्रकार $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

तथा $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. साइन या कोसाइन के उन कोणों के मान जो एक परिक्रमण (2π) से अधिक हैं, जैसे $\frac{13\pi}{6}$



आकृति 8.4

है, को ज्ञात करने के लिए सुई को वामावर्त दिशा में घुमाइए क्योंकि $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, इसलिए सुई OP_1 पर पहुँच जाएगी। इसलिए

$$\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \text{ और } \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

प्रेक्षण

1. सुई द्वारा एक परिक्रमण में बनाया गया कोण __________है।
2. $\cos\frac{\pi}{6}=$ __________ $=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

   $\sin\frac{\pi}{6}=$__________ $=\sin(2\pi+$ ______).
3. sine फलन चतुर्थांश ________ और ________ में शून्येत्तर है।
4. cosine फलन चतुर्थांश _______ और ______ में शून्येत्तर है।

अनुप्रयोग

1. इस क्रियाकलाप को tan, cot, sec, और cosec फलनों के मान ज्ञात करने के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है।
2. इस क्रियाकलाप से विद्यार्थी सीख सकते हैं कि

   $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ और

   $\cos(-\theta)=\cos\theta$

क्रियाकलाप 9

उद्देश्य

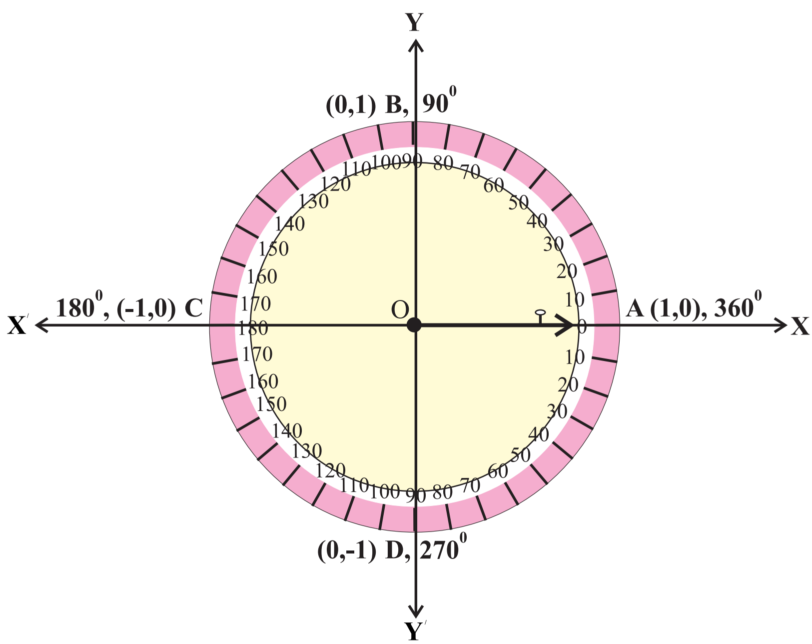
एक मॉडल तैयार करना जिससे sine और cosine फलनों के मान $\frac{\pi}{2}$ और π के गुणज वाले कोणों के रूप में निरूपित किया जा सके।

आवश्यक सामग्री

एक स्टैण्ड (stand) लीजिए जिसमें 0°-360° वाला प्रोट्रेक्टर तथा एक वृत्ताकार प्लास्टिक की प्लेट लगी हो तथा एक हैंडिल लगा हो जिससे प्रोंट्रेक्टर के केंद्र से घुमाया जा सके।

रचना की विधि

1. एक स्टैण्ड लीजिए जिसमें 0°-360° वाला प्रोट्रेक्टर संलग्न हो।
2. प्रोट्रेक्टर की त्रिज्या को 1 इकाई मानिए।



आकृति 9

3. दो रेखाएँ, पहली 0º-180º को मिलाने वाली तथा दूसरी 90º-270º को मिलाने वाली रेखाएँ खींचिए। स्पष्ट है कि दोनों रेखाएँ परस्पर लंबवत हैं।
4. 0°-180° को मिलाने वाली रेखा के 0° पर के बिंदु को (1,0) तथा 180° पर के बिंदु को (–1, 0) तथा 270° पर के बिंदु को (0, –1) से निरूपित कीजिए।
5. प्लास्टिक की वृत्ताकार प्लेट लीजिए और उस पर एक रेखा इंगित कीजिए जो इसकी त्रिज्या हो तथा त्रिज्या के बाहरी किनारे पर एक हैंडिल लगाइए।
6. प्लास्टिक की वृत्ताकार प्लेट को प्रोट्रेक्टर के केंद्र पर स्थिर कीजिए।

प्रदर्शन

1. वृत्ताकार प्लेट को वामावर्त दिशा में घुमाइए जिससे विभिन्न कोण जैसे 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π इत्यादि बन सकें।
2. इन कोणों तथा इनके गुणजों के sine तथा cosine फलनों के मानों को लंबवत् रेखाओं से पढ़िए।

प्रेक्षण

1. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा O से बिंदु A (1,0) की ओर इंगित करती है तब $\cos 0$ = _______ और $\sin 0$ = ________
2. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 90º पर है तथा बिंदु B (0,1) को इंगित करती है तब $\cos\frac{\pi}{2}$ = ________ और $\sin\frac{\pi}{2}$ = ________
3. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 180º पर है तथा बिंदु C (–1,0) को इंगित करती है तब $\cos\pi$ = _______ और $\sin\pi$ = ___________
4. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 270º पर है तथा बिंदु ________ को इंगित करती है तब $\cos\frac{3\pi}{2}$ = ________ और $\sin\frac{3\pi}{2}$ = ________

5. जब वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या रेखा 360^o पर है और पुनः बिंदु A (1,0) को इंगित करती है तब $\cos 2\pi$ = ________ और $\sin 2\pi$ = ________

अब निम्न सारणी की प्रविष्टियों को भरिए

त्रिकोणमितीय फलन	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\sin\theta$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$\cos\theta$	–	–	–	–	–	–	–	–	–

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का प्रयोग $\frac{\pi}{2}$ और π के गुणज कोणों के लिए अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 10

उद्देश्य

एक ही निर्देशांक अक्षों में sin x, sin $2x$, 2sin$x$ और sin $\frac{x}{2}$, के आरेख खींचना।

आवश्यक सामग्री

प्लाई बोर्ड, ग्राफ़ पेपर, गोंद, रूलर, रंगीन पेन, रबर (इरेज़र) इत्यादि।

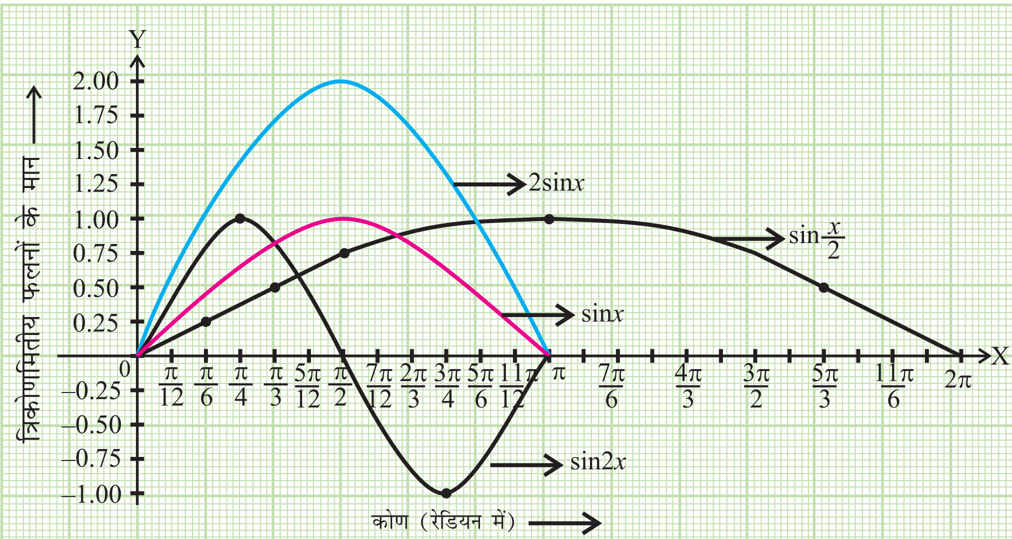
रचना की विधि

1. 30cm × 30cm आकार का एक प्लाईवुड लीजिए।
2. इस प्लाईवुड पर 25 cm × 25 cm आकार का एक मोटा ग्राफ़ पेपर चिपकाइए।
3. ग्राफ़ पेपर पर दो लंबवत् रेखाएँ खीचिए और उन्हें निर्देशांक अक्ष के रूप मे लीजिए।
4. आकृति 10.1 की भाँति दोनों अक्षों को अंशांकित कीजिए।
5. sin x, sin $2x$, 2sin x और sin $\frac{x}{2}$ के मानों की क्रमित युग्मों की सारणी बनाइए जैसा नीचे दिखाया गया है।

त्रिकोणमितीय फलन	0^o	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
sin x	0	0.26	0.50	0.71	0.86	0.97	1.00	0.97	0.86	0.71	0.50	0.26	0
sin $2x$	0	0.50	0.86	1.00	0.86	0.50	0	–0.5	–0.86	–1.0	–0.86	–0.50	0
2 sin x	0	0.52	1.00	1.42	1.72	1.94	2.00	1.94	1.72	1.42	1.00	0.52	0
sin $\frac{x}{2}$	0	0.13	0.26	0.38	0.50	0.61	0.71	0.79	0.86	0.92	0.97	0.99	1.00

प्रदर्शन

1. क्रमित युग्मों $(x, \sin x)$, $(x, 2\sin x)$, $\left(x,\ \sin\dfrac{x}{2}\right)$ तथा $(x,\ 2\sin x)$ को एक ही निर्देशांक अक्षों में आरेखित कीजिए। तत्पश्चात इन आरेखित क्रमित युग्मों को मुक्त हस्त वक्र (free hand curves) की सहायता से अलग-अलग रंगों से मिलाइए जैसा कि आकृति 10 में दिखाया गया है।



आकृति 10

प्रेक्षण

1. $\sin x$ तथा $2\sin x$ के आरेख समान आकार के है परंतु $\sin x$ के आलेख की अधिकतम ऊँचाई _________ के ग्राफ़ की ऊँचाई से ___________है।

2. $\sin 2x$ के आरेख की अधिकतम ऊँचाई ____________ है। यह $x =$ __________पर है।

3. $2\sin x$ के आरेख की अधिकतम ऊँचाई ____________ है। यह $x =$ __________ पर है।

4. $\sin\dfrac{x}{2}$ के आरेख की अधिकतम ऊँचाई _______ है। यह $x =$ _________ है।

5. $x =$ _______ पर $\sin x = 0$ है, $x =$ ________ पर $\sin 2x = 0$ है और $x =$ _______ पर $\sin \frac{x}{2} = 0$ है।

6. अंतराल $[0, \pi]$ में $\sin x$, $2 \sin x$ और $\sin \frac{x}{2}$ के आरेख x-अक्ष के ________ हैं और $\sin 2x$ के आरेख का कुछ भाग x-अक्ष के ________ है।

7. $\sin x$ और $\sin 2x$ के आरेख अंतराल $(0, \pi)$ में $x =$ ________ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

8. $\sin x$ तथा $\sin \frac{x}{2}$ के आरेख अंतराल $(0, \pi)$ मे $x =$ _________ पर प्रतिच्छेद करते हैं

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप कोणों के गुणज और अपवर्तक हेतु त्रिकोणमितीय फलनों के आरेखों की तुलना में सहायक होगा।