क्रियाकलाप 11

उद्देश्य

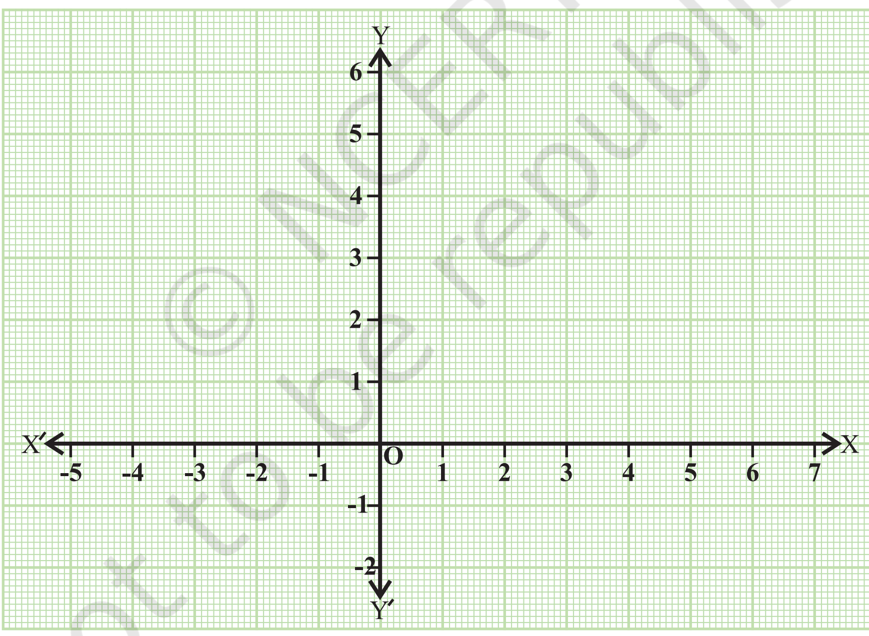
आलेखीय विधि से विभाजन सूत्र का सत्यापन करना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, चार्ट पेपर, आलेख काग़ज़, गोंद, ज्यामिति बॉक्स, पेन/पेंसिल।

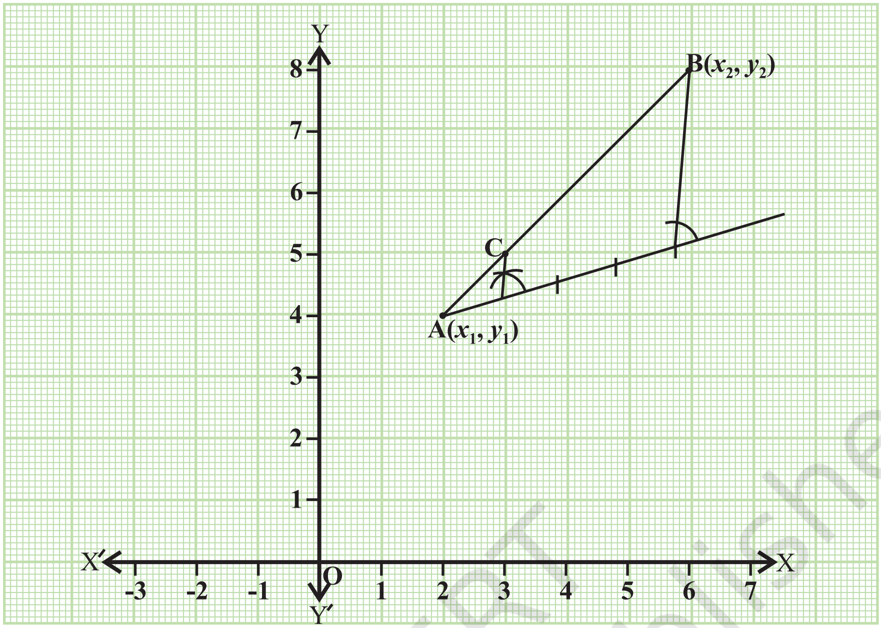
रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप के एक कार्ड बोर्ड पर एक चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. इस चार्ट पेपर पर एक आलेख काग़ज़ चिपकाइए।
3. आलेख काग़ज़ पर अक्ष X′OX और YOY′ खींचिए (देखिए आकृति 1)।



आकृति 1

4. इस आलेख काग़ज़ पर दो बिंदु A (x_1, y_1) और B (x_2, y_2) लीजिए (देखिए आकृति 2)।
5. बिंदुओं A और B को मिलाकर रेखाखंड AB प्राप्त कीजिए।



आकृति 2

प्रदर्शन

1. रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से $m : n$ के अनुपात में बिंदु C पर विभाजित कीजिए (देखिए आकृति 2)।
2. आलेख काग़ज़ से बिंदु C के निर्देशांक पढ़िए।
3. विभाजन सूत्र $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ का प्रयोग करके, बिंदु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. चरण 2 और चरण 3 में प्राप्त किए गए C के निर्देशांक एक ही हैं।

प्रेक्षण

1. A के निर्देशांक ____________ हैं।
   B के निर्देशांक ____________ हैं।
2. बिंदु C रेखाखंड AB को ____________ अनुपात में विभाजित करता है।
3. आलेख से, C के निर्देशांक ____________ हैं।
4. विभाजन सूत्र के प्रयोग से C के निर्देशांक ____________ हैं।
5. आलेख से तथा विभाजन सूत्र से प्राप्त C के निर्देशांक ____________ हैं।

अनुप्रयोग

इस सूत्र का प्रयोग ज्यामिति, सदिश बीजगणित तथा त्रिविमीय ज्यामिति में किसी त्रिभुज का केंद्रक ज्ञात करने में किया जाता है।

क्रियाकलाप 12

उद्देश्य

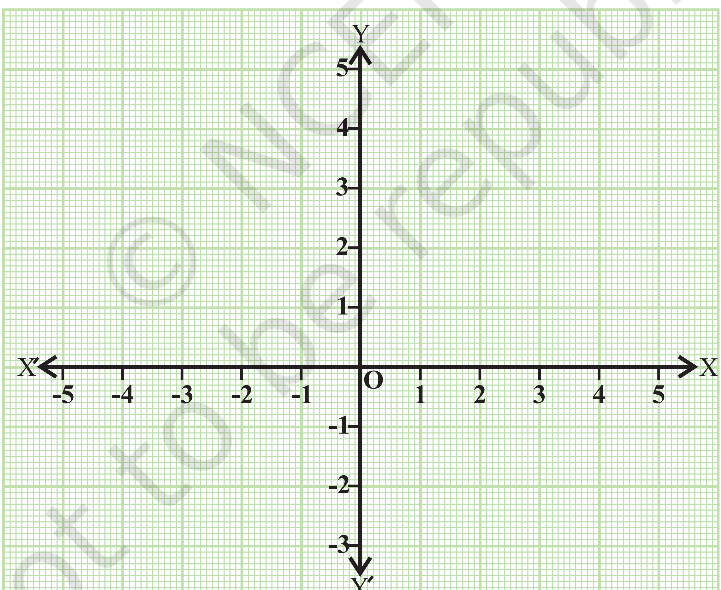
आलेखीय विधि से त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का सत्यापन करना।

आवश्यक सामग्री

कार्ड बोर्ड, चार्ट पेपर, आलेख काग़ज़, गोंद, पेन / पेंसिल और पटरी।

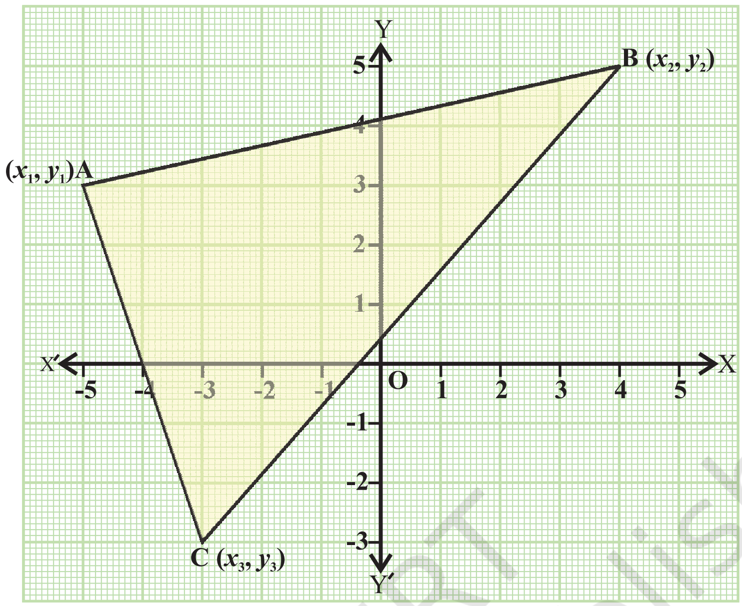
रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और इस पर एक चार्ट पेपर चिपकाइए।
2. इस चार्ट पेपर पर एक आलेख काग़ज़ चिपकाइए।
3. आलेख काग़ज़ पर अक्ष X′OX और YOY′ खींचिए (देखिए आकृति 1)।



आकृति 1

4. इस आलेख काग़ज़ पर तीन बिंदु $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ और $C(x_3,y_3)$ लीजिए।
5. इन बिंदुओं को मिलाकर एक त्रिभुज ABC प्राप्त कीजिए (देखिए आकृति 2)।



आकृति 2

प्रदर्शन

1. सूत्र, क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left[x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right]$ का प्रयोग करते हुए, Δ ABC का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए।

2. त्रिभुज ABC के अंदर घिरे हुए वर्गों की संख्या निम्नलिखित प्रकार से गिनकर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए–

   (i) एक पूर्ण वर्ग को 1 वर्ग लीजिए।

   (ii) आधे से अधिक वर्ग को 1 वर्ग लीजिए।

   (iii) आधे वर्ग को $\frac{1}{2}$ वर्ग लीजिए।

   (iv) उन वर्गों को छोड़ दीजिए जो आधे से कम हैं।

3. सूत्र द्वारा परिकलित क्षेत्रफल और वर्गों की संख्या गिनकर प्राप्त क्षेत्रफल लगभग बराबर अर्थात् एक ही हैं (देखिए चरण 1 और 2)।

प्रेक्षण

1. A के निर्देशांक ____________ हैं।

   B के निर्देशांक ____________ हैं।

   C के निर्देशांक ____________ हैं।

2. सूत्र के प्रयोग से, ΔABC का क्षेत्रफल ____________ है।

3. (i) पूर्ण वर्गों की संख्या = ____________ है।

   (ii) आधे से अधिक वर्गों की संख्या = ____________ है।

   (iii) आधे वर्गों की संख्या = ____________ है।

   (iv) वर्गों की संख्या गिनकर प्राप्त कुल क्षेत्रफल = ____________ है।

4. सूत्र से परिकलित क्षेत्रफल और वर्गों की संख्या गिनकर प्राप्त क्षेत्रफल ____________ हैं।

अनुप्रयोग

त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्यामिति के अनेक परिणामों को ज्ञात करने में उपयोगी रहता है, जैसे कि तीन बिंदुओं की संरेखता की जाँच, त्रिभुज / चतुर्भुज / बहुभुज के क्षेत्रफल परिकलित करना।

क्रियाकलाप 13

उद्देश्य

दो त्रिभुजों की समरूपता के लिए कसौटियाँ स्थापित करना।

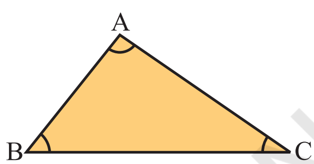
आवश्यक सामग्री

रंगीन काग़ज़, गोंद, स्कैच पेन, कटर, ज्यामिति बॉक्स।

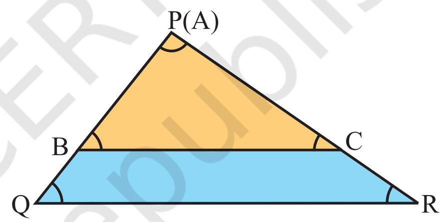
रचना की विधि

I:

1. एक रंगीन काग़ज़/चार्ट पेपर लीजिए। इसमें से दो त्रिभुज ABC और PQR ऐसे काट लीजिए जिनमें संगत कोण बराबर हों अर्थात् त्रिभुज ABC और PQR में, $\angle A = \angle P$; $\angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ है।



आकृति 1



आकृति 2

2. ΔABC को ΔPQR पर इस प्रकार रखिए कि शीर्ष A शीर्ष P पर गिरे तथा भुजा AB भुजा PQ के अनुदिश रहे (भुजा AC भुजा PR के अनुदिश रहे), जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।

प्रदर्शन I

1. आकृति 2 में, $\angle B = \angle Q$ है। क्योंकि संगत कोण बराबर हैं, इसलिए $BC \parallel QR$ है।

2. थेल्स प्रमेय (BPT) द्वारा, $\dfrac{PB}{BQ} = \dfrac{PC}{CR}$ या $\dfrac{AB}{BQ} = \dfrac{AC}{CR}$

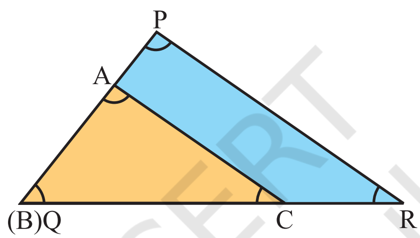
या $\dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{CR}{AC}$

या $\qquad \dfrac{BQ+AB}{AB} = \dfrac{CR+AC}{AC}$ [दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर]

या $\qquad \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AR}{AC}$ या $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{PR}{AC}$ या $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$ $\qquad$ (1)

II:

1. ΔABC को ΔPQR पर इस प्रकार रखिए कि शीर्ष B शीर्ष Q पर गिरे तथा भुजा BA भुजा QP के अनुदिश रहे (भुजा BC भुजा QR के अनुदिश रहे), जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।



आकृति 3

प्रदर्शन II

1. आकृति 3 में, $\angle C = \angle R$ है। क्योंकि संगत कोण बराबर हैं, अत: $AC \parallel PR$ है।

2. थेल्स प्रमेय (BPT) द्वारा, $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{CR}{BC}$; या $\dfrac{BP}{AB} = \dfrac{BR}{BC}$ [दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर]

या $\qquad \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{QR}{BC}$ या $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}$ $\qquad$ (2)

(1) और (2) से, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$

इस प्रकार, प्रदर्शनों I और II से हम पाते हैं कि जब दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर होते हैं, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) होती हैं। अत:, दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। यह त्रिभुजों की समरूपता की AAA कसौटी है।

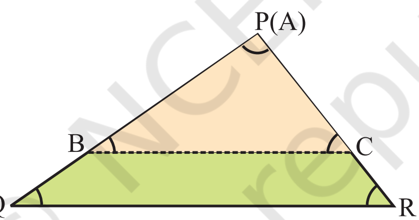
वैकल्पिक रूप से, आप त्रिभुज ABC और PQR की भुजाएँ माप सकते थे तथा निम्नलिखित प्राप्त कर सकते थे–

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

इस परिणाम से, ΔABC और ΔPQR समरूप हैं, अर्थात् यदि दो त्रिभुजों में तीनों संगत कोण बराबर हों, तो संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। इससे त्रिभुजों की समरूपता की AAA कसौटी प्राप्त होती है।

III:

1. एक रंगीन काग़ज़/चार्ट पेपर लीजिए तथा इसमें से दो त्रिभुज ABC और PQR ऐसे काट लीजिए कि इनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों, अर्थात्



आकृति 4

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \text{ हों।}$$

2. ΔABC को ΔPQR पर इस प्रकार रखिए कि शीर्ष A शीर्ष P पर गिरे तथा भुजा AB भुजा PQ के अनुदिश रहे। ध्यान दीजिए कि भुजा AC भुजा PR के अनुदिश रहती है (देखिए आकृति 4)।

प्रदर्शन III

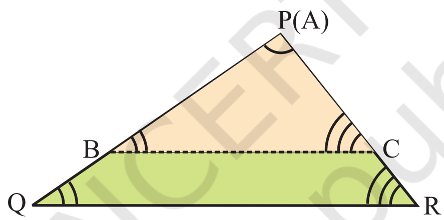
1. आकृति 4 में, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ है। इससे $\frac{AB}{BQ} = \frac{AC}{CR}$ प्राप्त होता है। अत:, $BC \parallel QR$ है

(थेल्स प्रमेय के विलोम द्वारा), अर्थात्, $\angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ है। साथ ही, $\angle A = \angle P$ है। अर्थात् दोनों त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं।
इस प्रकार, जब दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, तो उनके संगत कोण बराबर हैं। इसीलिए, दोनों त्रिभुज समरूप हैं। यह दो त्रिभुजों की समरूपता की SSS कसौटी है।

वैकल्पिक रूप से, आप ΔABC और ΔPQR के कोणों को माप कर $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ प्राप्त कर सकते थे। इस परिणाम से, ΔABC और ΔPQR समरूप हैं, अर्थात् दो त्रिभुजों में तीनों संगत भुजाएँ समानुपाती हों तो संगत कोण बराबर होते हैं तथा इसीलिए त्रिभुज समरूप होते हैं। इससे दो त्रिभुजों की समरूपता की SSS कसौटी प्राप्त होती है।

IV:

1. एक रंगीन काग़ज़/चार्ट पेपर लीजिए तथा इसमें से दो त्रिभुज ABC और PQR इस प्रकार



आकृति 5

काट लीजिए कि इनकी भुजाओं का एक युग्म समानुपाती हो तथा इन भुजाओं के युग्मों के अंतर्गत बने कोण बराबर हों।

अर्थात्, त्रिभुज ΔABC और ΔPQR में, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ तथा $\angle A = \angle P$ हों।

2. ΔABC को ΔPQR पर इस प्रकार रखिए कि शीर्ष A शीर्ष P पर गिरे तथा भुजा AB भुजा PQ के अनुदिश रहे, जैसा कि आकृति 5 में दर्शाया गया है।

प्रदर्शन IV:

1. आकृति 5 में, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ है, जिससे $\frac{AB}{BQ} = \frac{AC}{CR}$ प्राप्त होता है।

अतः, $BC \parallel QR$ (थेल्स प्रमेय के विलोम से) है

अतः, $\angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ है।

इस प्रदर्शन से, हम प्राप्त करते हैं कि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के समानुपाती हों तथा इन भुजाओं के युग्मों के अंतर्गत बने कोण बराबर हों, तो दोनों त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं। अतः, दोनों त्रिभुज समरूप हैं। यह दो त्रिभुजों की समरूपता की SAS कसौटी है।

वैकल्पिक रूप से, आप ΔABC और ΔPQR की शेष भुजाओं और कोणों को मापकर

$\angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ और $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ प्राप्त कर सकते थे।

इससे, ΔABC ओर ΔPQR समरूप हैं तथा हम दो त्रिभुजों की समरूपता की SAS कसौटी प्राप्त करते हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

I. ΔABC और ΔPQR में,

$\angle A$ = _______, $\angle P$ = _______, $\angle B$ = _______, $\angle Q$ = _______, $\angle C$ = _______, $\angle R$ = _______,

$\frac{AB}{PQ}$ = _________; $\frac{BC}{QR}$ = __________; $\frac{AC}{PR}$ = __________है।

यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण ____________ हैं, तो संगत भुजाएँ ____________ हैं। अतः, त्रिभुज ____________ हैं।

II. ΔABC और ΔPQR में,

$\frac{AB}{PQ}$ = _________; $\frac{BC}{QR}$ = __________; $\frac{AC}{PR}$ = __________ है।

$\angle A$ = ________, $\angle B$ = ________, $\angle C$ = ________, $\angle P$ = ________,

$\angle Q$ = ________, $\angle R$ = ________है।

यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ ____________ हैं, तो उनके संगत कोण ____________ होते हैं। इसीलिए, त्रिभुज ____________ हैं।

III. ΔABC और ΔPQR में,

$$\frac{AB}{PQ} = \_\_\_\_\_\_\_\_; \quad \frac{AC}{PR} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$\angle A =$ ________, $\angle P =$ ________, $\angle B =$ ________, $\angle Q =$ ________,

$\angle C =$ ________, $\angle R =$ ________है।

जब एक त्रिभुज की दो भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के _______ हों तथा इनके अंतर्गत कोण _______ हों, तो त्रिभुज _______ होते हैं।

अनुप्रयोग

समरूपता की अवधारणा का प्रयोग वस्तुओं के प्रतिबिंबों या चित्रों को छोटे साइज़ का बनाने या उनका आवर्धन करने में किया जाता है।

क्रियाकलाप 14

उद्देश्य

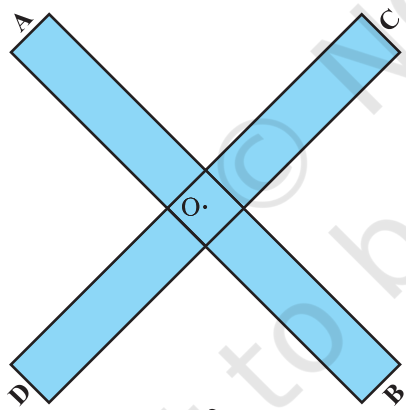
कीलों तथा दो प्रतिच्छेदी पट्टियों का प्रयोग करते हुए, समरूप वर्गों का एक निकाय खींचना।

आवश्यक सामग्री

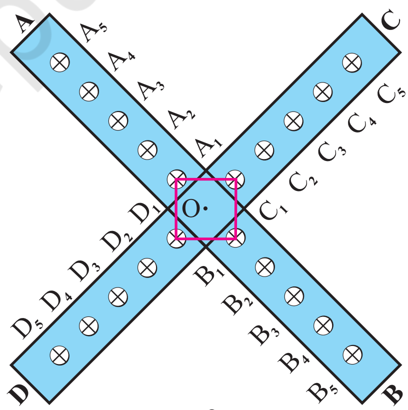
दो लकड़ी की पट्टियाँ (प्रत्येक की चौड़ाई 1cm और लंबाई 30cm), गोंद, हथौड़ा, कीलें।

रचना की विधि

1. लकड़ी की दो पट्टियाँ, मान लीजिए, AB और CD लीजिए।
2. दोनों पट्टियों को बिंदु O पर परस्पर समकोण पर प्रतिच्छेद करते हुए जोड़ दीजिए (देखिए आकृति 1)।
3. प्रत्येक पट्टी पर बराबर दूरियों पर (O के दोनों ओर) पाँच कीलें लगाइए तथा उनके नाम, मान लीजिए, $A_1, A_2, ..., A_5, B_1, B_2, ..., B_5, C_1, C_2, ..., C_5$ और $D_1, D_2, ..., D_5$ रखिए (देखिए आकृति 2)।

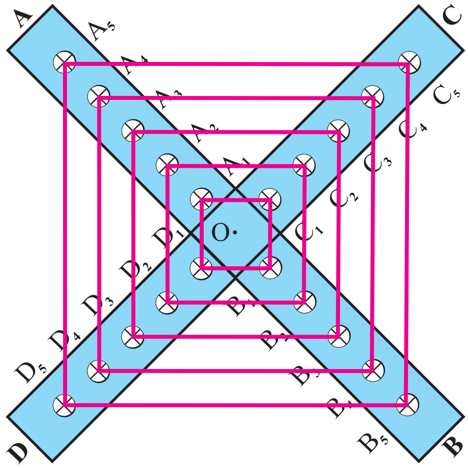


आकृति 1



आकृति 2

4. दोनों पट्टियों के चार सिरों पर नीचे लिखी संख्या 1 वाली कीलों ($A_1C_1B_1D_1$) पर एक धागा लपेटिए जिससे एक वर्ग प्राप्त हो जाए (देखिए आकृति 2)।
5. इसी प्रकार, पट्टियों पर नीचे लिखी अन्य समान संख्याओं वाली कीलों पर धागे लपेटिए (देखिए आकृति 3)। हमें वर्ग $A_1C_1B_1D_1$, $A_2C_2B_2D_2$, $A_3C_3B_3D_3$, $A_4C_4\,B_4\,D_4$ और $A_5C_5B_5D_5$ प्राप्त होते हैं।



आकृति 3

प्रदर्शन

1. पट्टियों AB और CD में से प्रत्येक पर कीलें समदूरस्थ इस प्रकार लगी हुई हैं कि

   $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$, $\quad B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$,

   $C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$, $\quad D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5$

2. अब किसी एक चतुर्भुज मान लीजिए $A_4C_4B_4D_4$ में (देखिए आकृति 3),

   $A_4O = OB_4 = 4$ इकाई

   साथ ही, $D_4O = OC_4 = 4$ इकाई,

   जहाँ 1 इकाई दो क्रमागत कीलों के बीच की दूरी है।

   अत:, विकर्ण परस्पर समद्विभाजित कर रहे हैं।

   इसलिए, $A_4C_4B_4D_4$ एक समांतर चतुर्भुज है।

   साथ ही, $A_4B_4 = C_4D_4 = 4 \times 2 = 8$ इकाई है। अर्थात् विकर्ण परस्पर बराबर हैं।

   इसके अतिरिक्त, $A_4B_4 \perp C_4D_4$ है (क्योंकि पट्टियाँ समकोण पर प्रतिच्छेद कर रही हैं)

   अत:, $A_4C_4B_4D_4$ एक वर्ग है।

   इसी प्रकार, हम कह सकते हैं कि $A_1C_1B_1D_1, A_2C_2B_2D_2, A_3C_3B_3D_3$ और $A_5C_5B_5D_5$ भी वर्ग हैं।

3. अब वर्गों की समरूपता को दर्शाने के लिए (देखिए आकृति 3), A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4, A_5C_5, C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3, C_4B_4, C_5B_5 इत्यादि को मापिए।

साथ ही, इन वर्गों की संगत भुजाओं के अनुपात, जैसे $\frac{A_2C_2}{A_3C_3}$, $\frac{C_2B_2}{C_3B_3}$, ... भी ज्ञात कीजिए।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

A_2C_2 = ______, A_4C_4 = ______

C_2B_2 = ______, C_4B_4 = ______

B_2D_2 = ______, B_4D_4 = ______

D_2A_2 = ______, D_4A_4 = ______.

टिप्पणी

दोनों विकर्णों की लंबाइयाँ असमान लेकर तथा दोनों पट्टियों के बीच का कोण समकोण से भिन्न लेकर, हम यही प्रक्रिया अपनाते हुए, समरूप समांतर चतुर्भुज/आयत प्राप्त कर सकते हैं।

$\frac{A_2C_2}{A_4C_4}$ = ______, $\frac{C_2B_2}{C_4B_4}$ = ______, $\frac{B_2D_2}{B_4D_4}$ = ______, $\frac{D_2A_2}{D_4A_4}$ = ______ है।

साथ ही, $\angle A_2$ = ______, $\angle C_2$ = ______, $\angle B_2$ = ______,

$\angle D_2$ = ______, $\angle A_4$ = ______, $\angle C_4$ = ______,

$\angle B_4$ = ______, $\angle D_4$ = ______ है।

अतः, वर्ग $A_2C_2B_2D_2$ और वर्ग $A_4C_4B_4D_4$ ______ हैं।

इसी प्रकार, प्रत्येक वर्ग अन्य वर्ग के ______ है।

अनुप्रयोग

समरूपता का उपयोग वस्तुओं के प्रतिबिंबों का आवर्धन या उनका साइज़ छोटा करने में (जैसे एटलस के मानचित्रों में) किया जाता है तथा साथ ही एक ही नेगेटिव से विभिन्न साइज़ों के फ़ोटो बनाने में भी इसका प्रयोग किया जाता है।

सावधानियाँ

1. कीलों और हथौड़े का प्रयोग करते समय सावधानी रखनी चाहिए।
2. कीलों को बराबर दूरियों पर ही लगाना चाहिए।

क्रियाकलाप 15

उद्देश्य

कीलों सहित Y के आकार की पट्टियों का प्रयोग करते हुए, समरूप त्रिभुजों का एक निकाय खींचना।

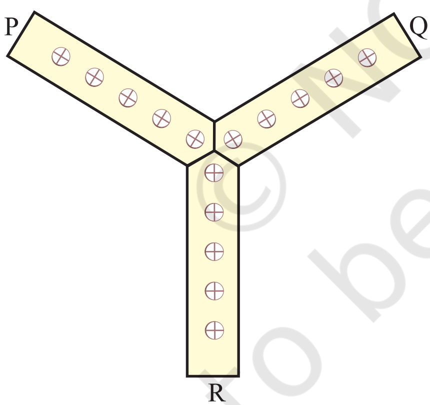
आवश्यक सामग्री

बराबर लंबाइयों (लगभग 10cm लंबी और 1cm चौड़ी) की लकड़ी की तीन पट्टियाँ, गोंद, कीलें, सेलोटेप, हथौड़ा।

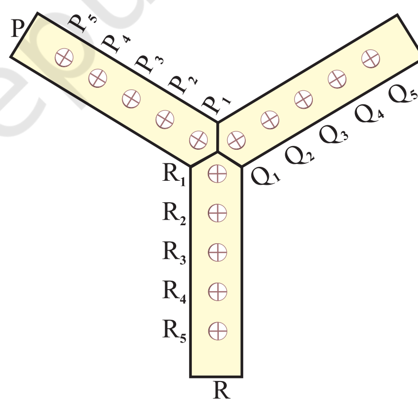
रचना की विधि

1. लकड़ी की तीन पट्टियाँ P, Q, और R लीजिए तथा प्रत्येक पट्टी का एक सिरा आकृति 1 में दर्शाए अनुसार काट लीजिए। गोंद/सेलोटेप का प्रयोग करते हुए, प्रत्येक पट्टी के इन तीनों सिरों को इस प्रकार जोड़िए कि ये सभी विभिन्न दिशाओं में रहें (देखिए आकृति 1)।

2. प्रत्येक पट्टी पर पाँच कीलें लगाइए तथा पट्टियों P, Q और R पर लगी कीलों के क्रमशः नाम $P_1, P_2, ..., P_5, Q_1, Q_2, ..., Q_5$ और $R_1, R_2, ..., R_5$ दीजिए (देखिए आकृति 2)।



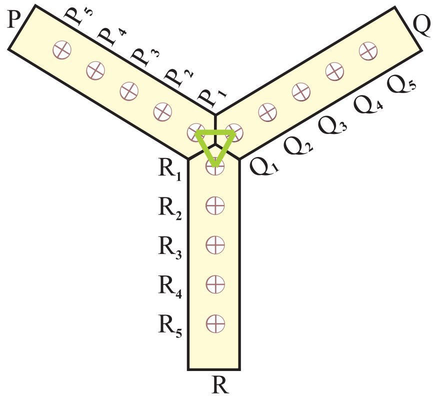
आकृति 1



आकृति 2

3. तीनों पट्टियों पर नीचे लिखी संख्या 1 वाली कीलों क्रमशः (P_1, Q_1, R_1) पर धागा लपेटिए (देखिए आकृति 3)।

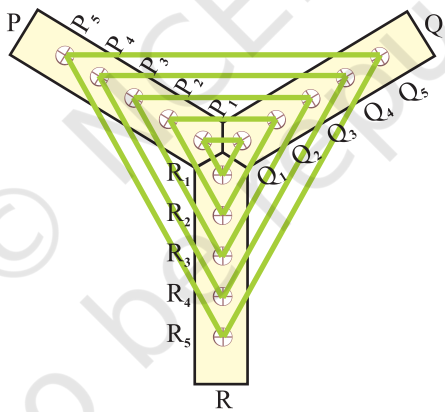
4. और अधिक त्रिभुज प्राप्त करने के लिए, क्रमशः पट्टियों पर नीचे समान संख्या लिखी कीलों पर धागे लपेटिए। हमें त्रिभुज $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$, $P_3Q_3R_3$, $P_4Q_4R_4$ और $P_5Q_5R_5$ प्राप्त होते हैं (देखिए आकृति 4)।



आकृति 3

प्रदर्शन

1. तीनों लकड़ी की पट्टियाँ एक विशेष कोण पर लगाई गई हैं।



आकृति 4

2. पट्टियों P, Q, और R में से प्रत्येक पर कीलें बराबर दूरियों पर लगाई गई हैं, ताकि पट्टी P पर $P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=P_4P_5$ है तथा इसी प्रकार क्रमशः Q और R पट्टियों पर $Q_1Q_2=Q_2Q_3=Q_3Q_4=Q_4Q_5$ और $R_1R_2=R_2R_3=R_3R_4=R_4R_5$ है।
3. अब कोई भी दो त्रिभुज, मान लीजिए, $P_1Q_1R_1$ और $P_5Q_5R_5$ लीजिए। भुजाओं P_1Q_1, P_5Q_5, P_1R_1, P_5R_5, R_1Q_1 और R_5Q_5 को मापिए।

4. अनुपात $\frac{P_1Q_1}{P_5Q_5}$, $\frac{P_1R_1}{P_5R_5}$ और $\frac{R_1Q_1}{R_5Q_5}$ ज्ञात कीजिए।

5. ध्यान दीजिए कि $\frac{P_1Q_1}{P_5Q_5} = \frac{P_1R_1}{P_5R_5} = \frac{R_1Q_1}{R_5Q_5}$ है।

   इस प्रकार, $\Delta P_1Q_1R_1 \sim P_5Q_5R_5$ (SSS समरूपता कसौटी)

6. यह सरलता से दर्शाया जा सकता है कि Y के आकार की इन पट्टियों पर कोई भी दो त्रिभुज समरूप हैं।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

P_1Q_1 = ______, Q_1R_1 = ______, R_1P_1 = ______,

P_5Q_5 = ______, Q_5R_5 = ______, R_5P_5 = ______,

$\frac{P_1Q_1}{P_5Q_5}$ = ______, $\frac{Q_1R_1}{Q_5R_5}$ = ______, $\frac{R_1P_1}{R_5P_5}$ = ______

अत:, $\Delta P_1Q_1R_1$ और $\Delta P_5Q_5R_5$ _______ हैं।

अनुप्रयोग

1. समरूपता की अवधारणा वस्तुओं के प्रतिबिंबों का आवर्धन करने या उनका साइज़ छोटा करने (जैसे एटलस में मानचित्र) में प्रयोग की जाती है तथा साथ ही एक ही नेगेटिव से विभिन्न साइज़ों के फ़ोटो बनाने में भी प्रयोग की जाती है।
2. समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करते हुए, किसी वस्तु के अज्ञात मापन उसी वस्तु के समरूप वस्तु के ज्ञात मापनों की सहायता से निर्धारित किए जा सकते हैं।
3. समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करते हुए, किसी स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात की जा सकती है, यदि उस स्तंभ की सूर्य के प्रकाश में छाया की लंबाई ज्ञात हो।

टिप्पणी

उपयुक्त कीलों पर धागे लपेटकर, हम ऐसे समरूप त्रिभुज भी प्राप्त कर सकते हैं, जो समबाहु न हों।

क्रियाकलाप 16

उद्देश्य

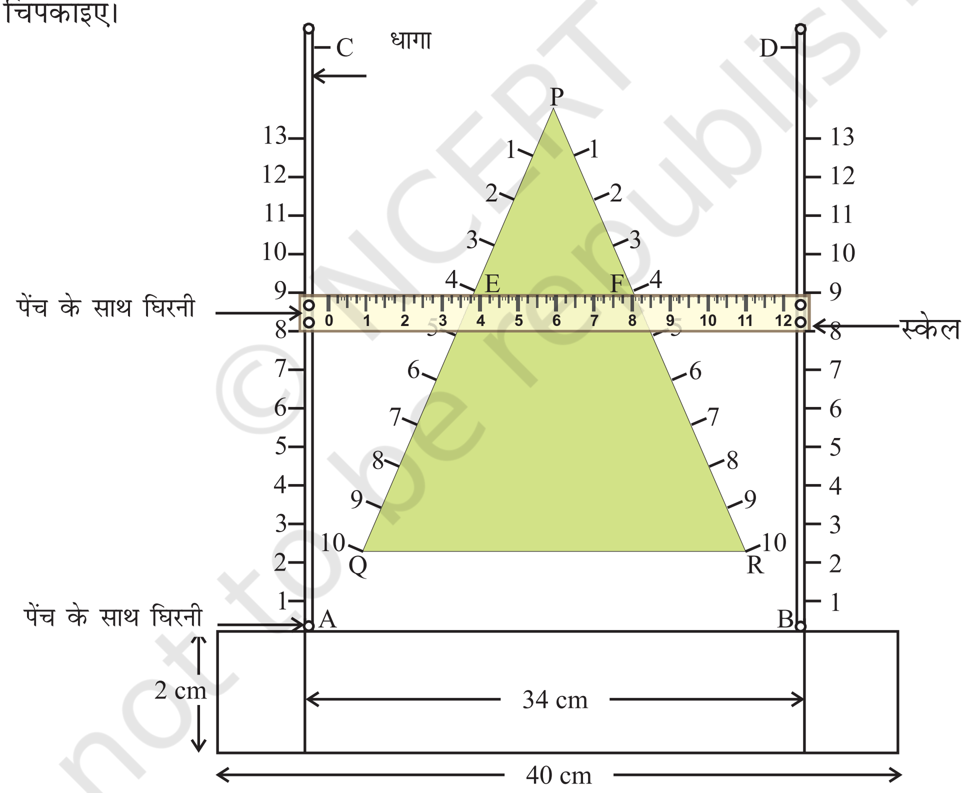
आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय) का सत्यापन करना।

आवश्यक सामग्री

हार्ड बोर्ड लकड़ी की दो पट्टियाँ (प्रत्येक की चौड़ाई 1cm और लंबाई 10cm), गोंद, कटर, हथौड़ा, कीलें, सफ़ेद काग़ज़, घिरनियाँ, पेंच, स्केल, धागा।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का हार्ड बोर्ड का एक टुकड़ा काट लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।



आकृति 1

2. लकड़ी की दो पतली पट्टियाँ लीजिए जिन पर बराबर दूरियों पर 1, 2, 3, ... अंकित हो तथा उन्हें एक क्षैतिज पट्टी के दोनों सिरों पर आकृति 1 में दर्शाए अनुसार ऊर्ध्वाधर रूप से लगा दीजिए तथा इन्हें AC और BD नाम दीजिए।

3. हार्ड बोर्ड में से एक त्रिभुजाकार टुकड़ा PQR काट लीजिए (मोटाई नगण्य होनी चाहिए) और इस पर एक रंगीन चिकना काग़ज़ चिपका लीजिए तथा इसे समांतर पट्टियों AC और BD के बीच में इस प्रकार रखिए कि आधार QR क्षैतिज पट्टी AB के समांतर रहे, जैसे आकृति 1 में खींचा गया है।

4. त्रिभुजाकार टुकड़े की अन्य दो भुजाओं पर आकृति में दर्शाए अनुसार 1, 2, 3... संख्याएँ अंकित कीजिए।

5. क्षैतिज पट्टी के अनुदिश पेंच लगाइए तथा बोर्ड के ऊपरी भाग पर, बिंदुओं C और D पर दो और पेंच लगाइए ताकि A, B, D और C एक आयत के शीर्ष बन जाएँ।

6. एक रूलर (स्केल) लीजिए और इस पर आकृति में दर्शाए अनुसार चार छेद कर लीजिए तथा इन छेदों पर पेंचों की सहायता से चार घिरनियाँ लगा दीजिए।

7. बिंदु A, B, C और D पर लगी कीलों से बंधे धागे, जो घिरनियों से ऊपर होकर जा रहा है, का प्रयोग करते हुए, बोर्ड पर एक स्केल लगा दीजिए जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है, ताकि स्केल क्षैतिज पट्टी AB के समांतर खिसक सके तथा इसे त्रिभुजाकार टुकड़े पर स्वतंत्र रूप से ऊपर-नीचे सरकाया जा सके।

प्रदर्शन

1. स्केल को ऊर्ध्वाधर पट्टियों पर, Δ PQR के आधार QR के समांतर रखते हुए, मान लीजिए बिंदुओं E और F पर रखिए। PE और EQ तथा साथ ही PF और FR दूरियों को मापिए।

   इसका सरलता से सत्यापन किया जा सकता है कि $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$ है।

   इससे आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय) का सत्यापन हो जाता है।

2. स्केल को ΔPQR के आधार के समांतर ऊपर-नीचे सरकाइए तथा उपरोक्त क्रियाकलाप को दोहराइए और स्केल की विभिन्न स्थितियों के लिए थेल्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

PE = ___________, PF = ___________, EQ = ___________,

FR = ___________

$\frac{PE}{EQ}$ = _______, $\frac{PF}{FR}$ = ___________ है।

इस प्रकार, $\frac{PE}{EQ}=\frac{PF}{FR}$ है। इससे प्रमेय का सत्यापन हो जाता है।

अनुप्रयोग

इस प्रमेय का उपयोग त्रिभुजों की समरूपता की विभिन्न कसौटियों को स्थापित करने में किया जा सकता है। इसका उपयोग एक दिए हुए बहुभुज के समरूप, एक दिए हुए स्केल गुणक के साथ, एक अन्य बहुभुज की रचना करने में भी किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 17

उद्देश्य

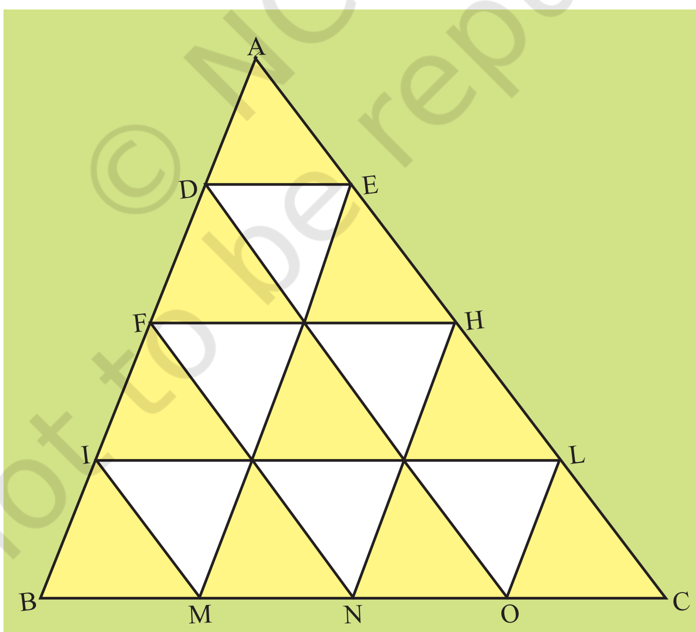
समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों और भुजाओं में संबंध ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

रंगीन काग़ज़, गोंद, ज्यामिति बॉक्स, कैंची/, कटर, सफ़ेद काग़ज़।

रचना की विधि

1. मापन 15 cm × 15 cm का एक रंगीन काग़ज़ लीजिए।
2. एक सफ़ेद काग़ज़ पर एक त्रिभुज ABC खींचिए।
3. इस Δ ABC की एक भुजा AB को कुछ बराबर भागों (मान लीजिए 4 भागों) में विभाजित कीजिए।
4. विभाजन के बिंदुओं से होकर, BC के समांतर रेखाखंड खींचिए जो AC को क्रमशः बिंदुओं E, H तथा L पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा AC के विभाजन बिंदुओं से होकर, AB के समांतर रेखाखंड खींचिए (देखिए आकृति 1)।



आकृति 1

5. इस त्रिभुज को रंगीन काग़ज़ पर चिपकाइए।

6. Δ ABC अब 16 सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित हो गया है (देखिए आकृति 1)।

प्रदर्शन

1. ΔAFH में, 4 सर्वांगसम त्रिभुज हैं तथा इसमें आधार $FH = 2DE$ है।

2. ΔAIL में, 9 सर्वांगसम त्रिभुज हैं तथा इसमें आधार $IL = 3\,DE = \frac{3}{2}$ FH है।

3. ΔABC में, आधार $BC = 4DE = 2\,FH = \frac{4}{3}IL$ है।

4. $\Delta ADE \sim \Delta AFH \sim \Delta AIL \sim \Delta ABC$

5. $$\frac{ar(\Delta\ AFH)}{ar(\Delta\ ADE)} = \frac{4}{1} = \left(\frac{FH}{DE}\right)^2$$

$$\frac{ar(\Delta\ AIL)}{ar(\Delta\ AFH)} = \frac{9}{4} = \left(\frac{IL}{FH}\right)^2$$

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta AFH)} = \frac{16}{4} = \left(\frac{BC}{FH}\right)^2$$

अत:, समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

BC = ______________, IL = ______________, FH = ______________,
DE = ______________.

मान लीजिए कि ΔADE का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है। तब,

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta AFH)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \quad \frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta AIL)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta ABC)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \quad \left(\frac{DE}{FH}\right)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\left(\frac{DE}{IL}\right)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \quad \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

जो यह दर्शाते हैं कि समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के _______ होता है।

अनुप्रयोग

यह परिणाम दो समरूप आकृतियों के क्षेत्रफलों की तुलना करने में उपयोगी रहता है।

क्रियाकलाप 18

उद्देश्य

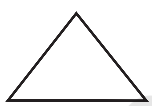
प्रायोगिक रूप से यह सत्यापित करना कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

आवश्यक सामग्री

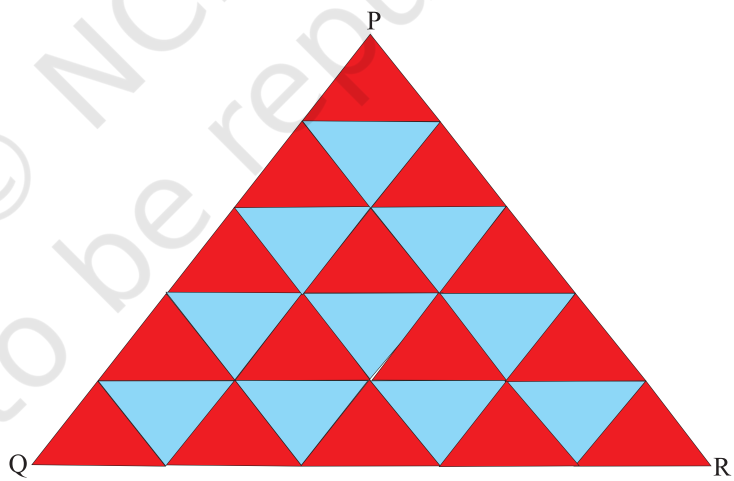
रंगीन काग़ज़, ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, सफ़ेद काग़ज़, कार्ड बोर्ड।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. रंगीन काग़ज़ पर x इकाई की भुजा वाला एक त्रिभुज (समबाहु) बनाइए और इसे काट कर निकाल लीजिए (देखिए आकृति 1)। इसे एक इकाई त्रिभुज कहिए।
3. रंगीन काग़ज़ों का प्रयोग करते हुए, उपरोक्त इकाई त्रिभुज के सर्वांगसम पर्याप्त संख्या में त्रिभुज बनाइए।

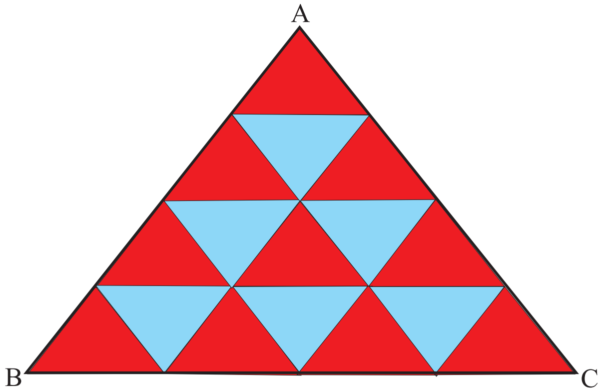


आकृति 1



आकृति 2

4. इन त्रिभुजों को कार्ड बोर्ड पर आकृति 2 और आकृति 3 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए और चिपकाइए।



आकृति 3

प्रदर्शन

ΔABC और ΔPQR समरूप हैं। ΔABC की भुजा $BC = (x + x + x + x)$ इकाई $= 4x$ इकाई

ΔPQR की भुजा $QR = 5x$ इकाई

ΔABC और ΔPQR की संगत भुजाओं का अनुपात

$\frac{BC}{QR} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$ है।

ΔABC का क्षेत्रफल $= 16$ इकाई त्रिभुज

ΔPQR का क्षेत्रफल $= 25$ इकाई त्रिभुज

ΔABC और ΔPQR के क्षेत्रफलों का अनुपात $= \frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2} =$ ΔABC और ΔPQR की संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$x =$ _______, इकाई त्रिभुज (आकृति 1 में समबाहु त्रिभुज) का क्षेत्रफल = ________ है।

ΔABC का क्षेत्रफल = _______ है, ΔPQR का क्षेत्रफल = _______ है।

ΔABC की भुजा $BC =$ ______ है, ΔPQR की भुजा $QR =$ ______ है।

$BC^2 =$ ____________, $QR^2 =$ ____________,

$AB =$ ____________, $AC =$ ____________,

$PQ =$ ____________, $PR =$ ____________,

$AB^2 =$ ____________, $AC^2 =$ ____________,

$PQ^2 =$ ____________, $PR^2 =$ ____________,

$$\frac{BC^2}{QR^2} = \underline{\hspace{3cm}}, \qquad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC^2}{-} = \left(\frac{AB}{-}\right)^2 = \left(\frac{-}{PR}\right)^2$$

अनुप्रयोग

यह परिणाम त्रिभुजों के अतिरिक्त अन्य समरूप आकृतियों के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है, जिससे बाद में भूखंडों, इत्यादि के मानचित्रों को तैयार करने में सहायता मिलती है।

टिप्पणी

यह क्रियाकलाप किसी भी प्रकार के त्रिभुज को इकाई त्रिभुज मानकर किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 19

उद्देश्य

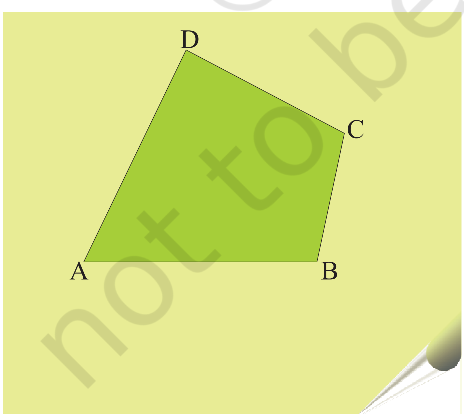
एक दिए हुए स्केल गुणक (1 से कम) के अनुसार, एक दिए हुए चतुर्भुज के समरूप चतुर्भुज की रचना करना।

आवश्यक सामग्री

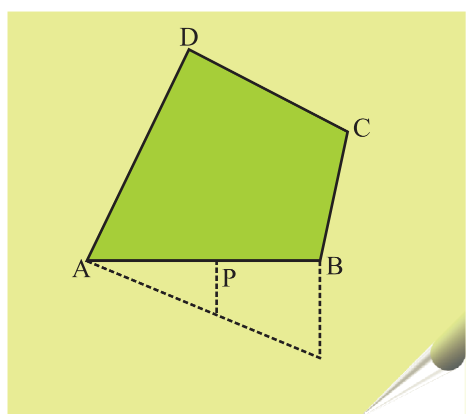
चार्ट पेपर (रंगीन और सफ़ेद), ज्यामिति बॉक्स, कटर, रबड़, ड्रॉइंगपिन, गोंद, पिन, स्कैच पेन, टेप।

रचना की विधि

1. एक रंगीन चार्ट पेपर में से, दिए हुए चतुर्भुज ABCD का कटआउट काट लीजिए तथा इसे अन्य चार्ट पेपर पर चिपकाइए (देखिए आकृति 1)।
2. चतुर्भुज ABCD के आधार (यहाँ AB) को आंतरिक रूप से, दिए हुए स्केल गुणक से प्राप्त अनुपात में बिंदु P पर विभाजित कीजिए (देखिए आकृति 2)।
3. रूलर (पटरी) की सहायता से चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC को मिलाइए।
4. P से होकर, परकार (सेट स्क्वायर या काग़ज़ मोड़ने की क्रिया) की सहायता से रेखाखंड PQ||BC खींचिए, जो AC से R पर मिले (देखिए आकृति 3)।



आकृति 1

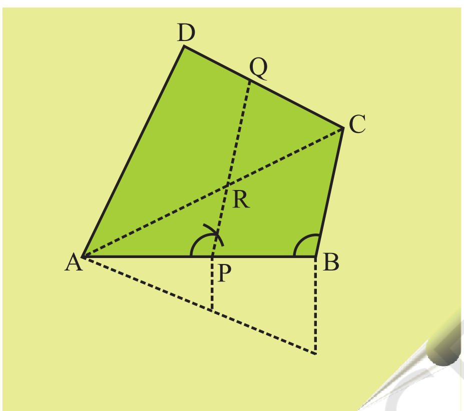


आकृति 2

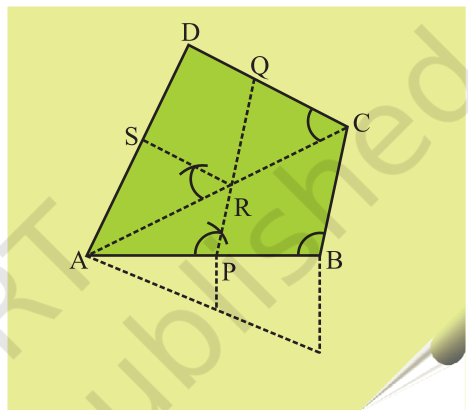
5. R से होकर, परकार (सेट स्क्वायर या काग़ज़ मोड़ने की क्रिया) का प्रयोग करते हुए, एक रेखाखंड RS||CD खींचिए, जो AD से S पर मिले (देखिए आकृति 4)।

6. स्कैच पेन की सहायता से चतुर्भुज APRS में रंग भरिए।

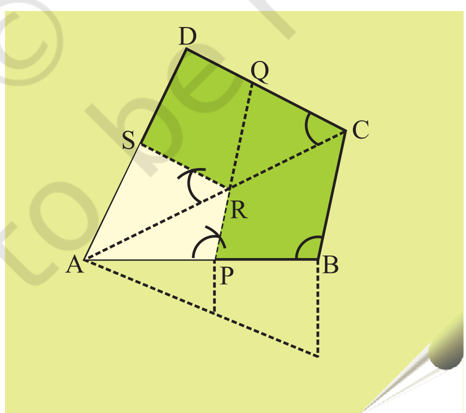
   APRS ही चतुर्भुज ABCD के समरूप दिए हुए स्केल गुणक के अनुसार वाँछित चतुर्भुज है (देखिए आकृति 5)।



आकृति 3



आकृति 4



आकृति 5

प्रदर्शन

1. ΔABC में, $PR \| BC$ है। अतः, $\Delta APR \sim \Delta ABC$ है।
2. ΔACD में, $RS \| CD$ है। अतः, $\Delta ARS \sim \Delta ACD$ है।
3. चरणों 1 और 2 से, चतुर्भुज APRS ~ चतुर्भुज ABCD है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

AB = _____, AP = _____, BC = _____,

PR = _____, CD = _____, RS = _____,

AD = _____, AS = _____

$\angle A$ = _____, $\angle B$ = _____, $\angle C$ = _____,

$\angle D$ = _____, $\angle P$ = _____, $\angle R$ = _____,

$\angle S$ = _____ है।

$\frac{AP}{AB}$ = ______, $\frac{PR}{BC}$ = ______, $\frac{RS}{CD}$ = ______, $\frac{AS}{AD}$ = ______,

$\angle A$ = कोण _____, $\angle P$ = कोण_____, $\angle R$ = कोण_____, $\angle S$ = कोण_____ है।
अतः, चतुर्भुज APRS और ABCD _______ हैं।

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का प्रयोग दैनिक जीवन में, एक ही वस्तु के विभिन्न साइजों में चित्र (या फ़ोटो) बनाने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 20

उद्देश्य

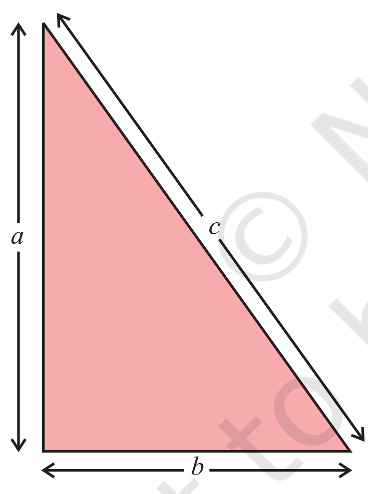
पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन करना।

आवश्यक सामग्री

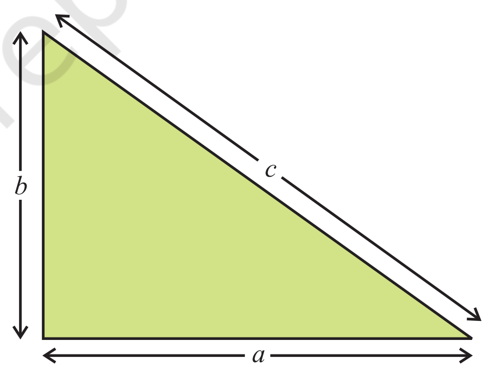
चार्ट पेपर, विभिन्न रंगों के चिकने (ग्लेज्ड) काग़ज़, ज्यामिति बॉक्स, कैंची, गोंद।

रचना की विधि

1. एक चिकना काग़ज़ लीजिए और उस पर आधार b इकाई और लंब a इकाई वाला एक समकोण त्रिभुज खींचिए, जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।
2. एक अन्य चिकना काग़ज़ लीजिए और उस पर आधार a इकाई और लंब b इकाई वाला एक समकोण त्रिभुज खींचिए, जैसा आकृति 2 में दर्शाया गया है।

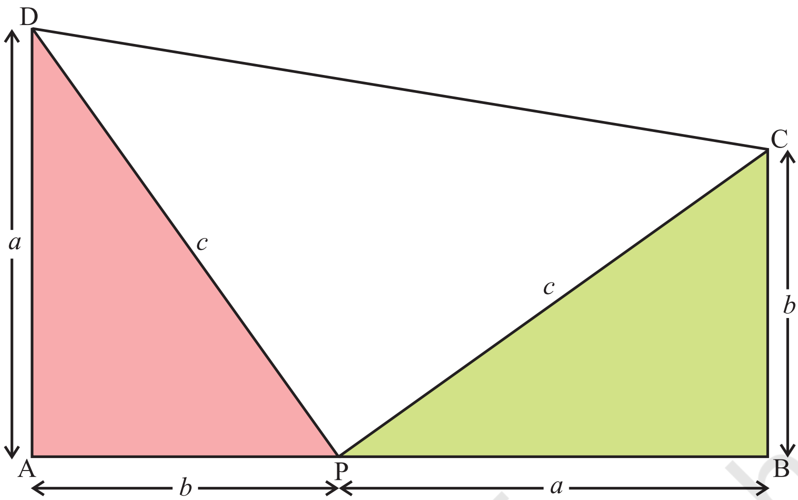


आकृति 1



आकृति 2

3. दोनों त्रिभुजों को काटकर निकाल लीजिए तथा इन्हें एक चार्ट पेपर पर इस प्रकार चिपकाइए कि दोनों त्रिभुजों के आधार एक ही सरल रेखा में रहें, जैसा आकृति 3 में दर्शाया गया है। इन त्रिभुजों को आकृति में दर्शाए अनुसार नामांकित कीजिए।



आकृति 3

4. CD को मिलाइए।

5. ABCD एक समलंब है।

6. यह समलंब तीन त्रिभुजों APD, PBC और PCD में विभाजित हो गया है।

प्रदर्शन

1. जाँच कीजिए कि ΔDPC का $\angle P$ समकोण है।

2. ΔAPD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} ba$ वर्ग इकाई

   ΔPBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} ab$ वर्ग इकाई

   ΔPCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} c^2$ वर्ग इकाई

3. समलंब ABCD का क्षेत्रफल = ar(ΔAPD) + ar(ΔPBC) + ar(ΔPCD)

   अत:, $\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}(ab) + \frac{1}{2}(ab) + \frac{1}{2}c^2$

अर्थात्, $(a+b)^2 = ab + ab + c^2$

अर्थात्, $a^2 + b^2 + 2ab = ab + ab + c^2$

अर्थात्, $a^2 + b^2 = c^2$

इस प्रकार, पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन हो गया।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा– $\angle P$ = ________

AP = ________, AD = ________, DP = ________,

BP = ________, BC = ________, PC = ________है।

$AD^2 + AP^2$ = ________, DP^2 = ________,

$BP^2 + BC^2$ = ________, PC^2 = ________है।

इस प्रकार, $a^2 + b^2$ = ________है।

अनुप्रयोग

जब भी किसी समकोण त्रिभुज की तीन भुजाओं में से दो भुजाएँ दी हों, तो पाइथागोरस प्रमेय द्वारा तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है।