क्रियाकलाप 21

उद्देश्य

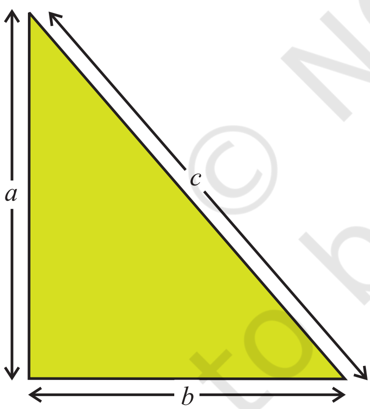
भास्कर की विधि द्वारा पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन करना।

आवश्यक सामग्री

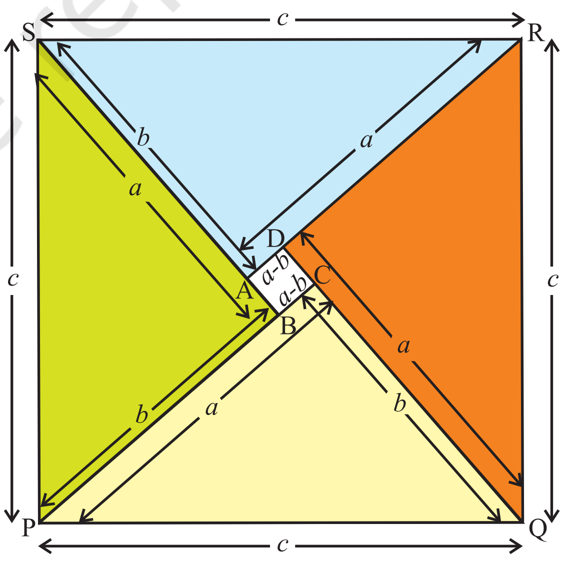
विभिन्न रंगों के चार्ट पेपर, चिकने काग़ज़, ज्यामिति बॉक्स, कैंची, गोंद।

रचना की विधि

1. एक चार्ट पेपर लीजिए तथा उस पर एक समकोण त्रिभुज खींचिए जिसकी भुजाएँ a, b और c इकाइयों की हों, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।
2. विभिन्न रंगों के चार्ट पेपरों से, इस त्रिभुज की तीन प्रतिलिपियाँ बनाइए।
3. इन चारों त्रिभुजों को एक वर्ग बनाते हुए चिपकाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।
4. भुजा c इकाई वाले इस वर्ग को PQRS से नामांकित कीजिए।



आकृति 1



आकृति 2

5. भुजा $(a - b)$ इकाई का एक वर्ग ABCD, वर्ग PQRS के अंदर बनता है।

   वर्ग PQRS का क्षेत्रफल भुजाओं a, b और c इकाइयों वाले चारों सर्वसम समकोण त्रिभुजों के क्षेत्रफलों में भुजा $(a - b)$ इकाई वाले वर्ग का क्षेत्रफल जोड़ने पर प्राप्त क्षेत्रफल के बराबर है।

प्रदर्शन

1. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} a\,b$ वर्ग इकाई है। अत:, चारों समकोण त्रिभुजों का क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{1}{2} ab = 2ab$ वर्ग इकाई है। भुजा $(a - b)$ वाले वर्ग का क्षेत्रफल $= (a - b)^2$ वर्ग इकाई $= (a^2 - 2ab + b^2)$ वर्ग इकाई।
2. भुजा c इकाई वाले वर्ग PQRS का क्षेत्रफल $= c^2$ वर्ग इकाई है।

   अत:, $c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$

   या $c^2 = a^2 + b^2$

   इस प्रकार, पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन हो जाता है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

त्रिभुज की भुजा a =__________ इकाई है।

त्रिभुज की भुजा b =__________ इकाई है।

त्रिभुज की भुजा c =__________ इकाई है।

$a^2 + b^2$ =__________ वर्ग इकाई , c^2 =__________ वर्ग इकाई

इस प्रकार, a^2 + __________ $= c^2$ है।

अनुप्रयोग

जब भी किसी समकोण त्रिभुज की तीन भुजाओं में से कोई दो भुजाएँ दी हुई हों, तो पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है।

क्रियाकलाप 22

उद्देश्य

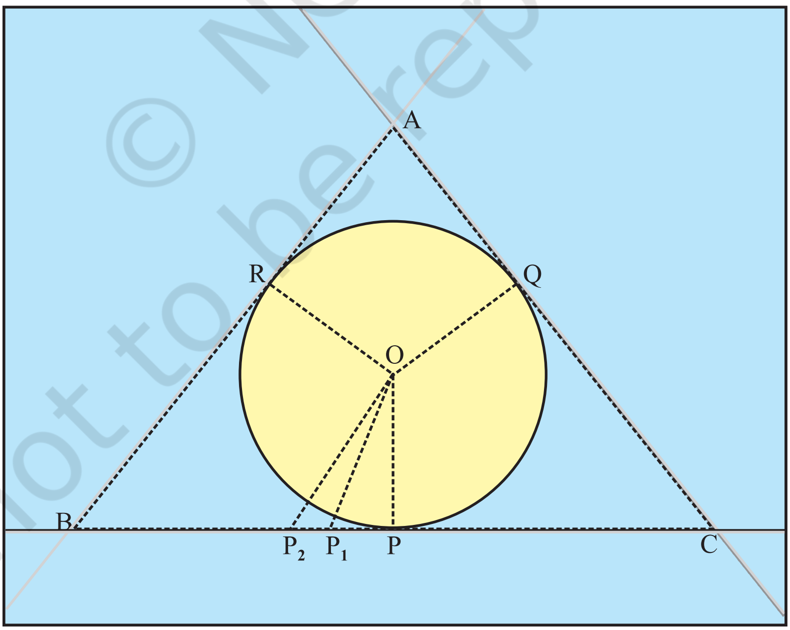
प्रायोगिक रूप से यह सत्यापित करना कि एक वृत्त के किसी भी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

आवश्यक सामग्री

विभिन्न रंगों के चार्ट पेपर, गोंद, कैंची/कटर, ज्यामिति बॉक्स।

रचना की विधि

1. सुविधाजनक माप का एक रंगीन चार्ट पेपर लीजिए और इस पर एक उपयुक्त त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इस वृत्त को काट लीजिए और इसे किसी और रंग के चार्ट पेपर पर चिपकाइए।
2. इस वृत्त पर बिंदु P, Q और R लीजिए (देखिए आकृति 1)।
3. बिंदुओं P, Q और R से होकर, अनेक मोड़ के निशान बनाइए तथा इनमें से वे निशान चुनिए जो वृत्त को स्पर्श करते हैं। ये मोड़ के निशान वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।



आकृति 1

4. इन मोड़ के निशानों को बिंदुओं A, B और C पर मिलने दीजिए, जिससे एक त्रिभुज ABC बनता है (मोड़ के निशानों को बिन्दुंकित रेखाओं से दर्शाया गया है)।
5. अब वृत्त को ΔABC का अंतः वृत्त माना जा सकता है, जिसका केंद्र O है। OP, OQ और OR को मिलाइए।
6. मोड़ के निशान BC पर बिंदु P_1 और P_2 लीजिए।

प्रदर्शन

त्रिभुज POP_1 और POP_2 को लीजिए।

स्पष्टतः, $OP_1 > OP$, $OP_2 > OP$ है।

वास्तव में, OP भुजा BC पर P के अतिरिक्त किसी भी बिंदु को O से मिलाने वाले रेखाखंड से छोटा है। अर्थात्, OP इन सभी रेखाखंडों में सबसे छोटा है।

अतः, $OP \perp BC$ है।

इस प्रकार, वृत्त के किसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

इसी प्रकार, दर्शाया जा सकता है कि $OQ \perp AC$ और $OR \perp AB$ है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

OP = ..., OQ =.............., OR = ...

OP_1 = ..., OP_2 =.............. है।

$OP < OP_1$, OP .... OP_2

अतः, OP ..... BC है।

इस प्रकार, स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर ____________ है।

अनुप्रयोग

इस परिणाम का प्रयोग ज्यामिति के अन्य परिणामों को सिद्ध करने के लिए किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 23

उद्देश्य

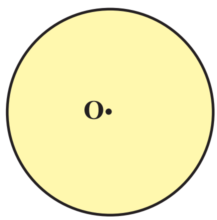
किसी वृत्त पर एक बिंदु से खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

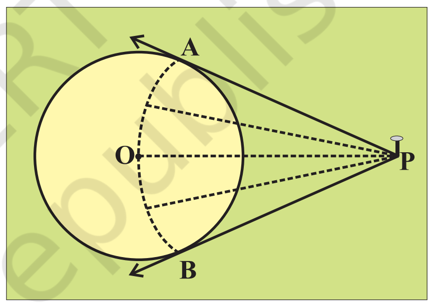
कार्ड बोर्ड, ज्यामिति बॉक्स, कटर, विभिन्न रंगीन शीट, गोंद।

रचना की विधि

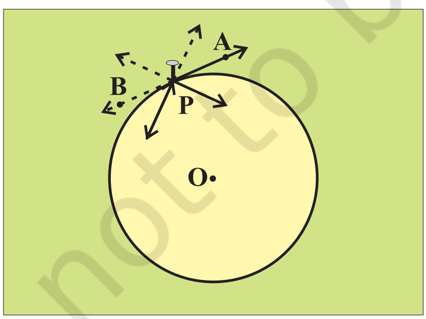
1. सुविधाजनक माप का एक कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक रंगीन शीट चिपकाइए।
2. एक रंगीन शीट पर उपयुक्त त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए तथा उसे काटकर निकालिए (देखिए आकृति 1)।



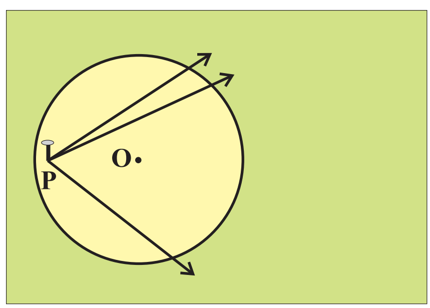
आकृति 1



आकृति 2



आकृति 3



आकृति 4

3. काटे गए इस वृत्त को कार्ड बोर्ड पर चिपकाइए।
4. वृत्त के बाहर (पर या के अंदर) एक बिंदु P लीजिए और उस पर एक कील लगाइए (देखिए आकृति 2, आकृति 3 और आकृति 4)।
5. एक डोरी लीजिए और इसके एक सिरे को बिंदु P पर लगी कील से बाँध दीजिए तथा डोरी के दूसरे सिरे को वृत्त के केंद्र की ओर चलाइए। साथ ही, इसे केंद्र से ऊपर-नीचे कीजिए ताकि यह वृत्त को स्पर्श कर सके (देखिए आकृति 2, आकृति 3 और आकृति 4)।

प्रदर्शन

1. यदि बिंदु P वृत्त के बाहर है, तो इसकी दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB हैं, जैसा आकृति 2 में दर्शाया गया है।
2. यदि बिंदु P वृत्त पर स्थित है, तो इसकी बिंदु P पर केवल एक ही स्पर्श रेखा है (देखिए आकृति 3)।
3. यदि बिंदु P वृत्त के अंदर स्थित है, तो वृत्त के बिंदु P पर कोई स्पर्श रेखा नहीं है (देखिए आकृति 4)।

प्रेक्षण

1. आकृति 2 में, P से होकर जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या = __________ है।
2. आकृति 3 में, P से होकर जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या = _________ है।
3. आकृति 4 में, P से होकर जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या = _________ है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप इस गुण का सत्यापन करने में सहायक होता है कि वृत्त के किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

क्रियाकलाप 24

उद्देश्य

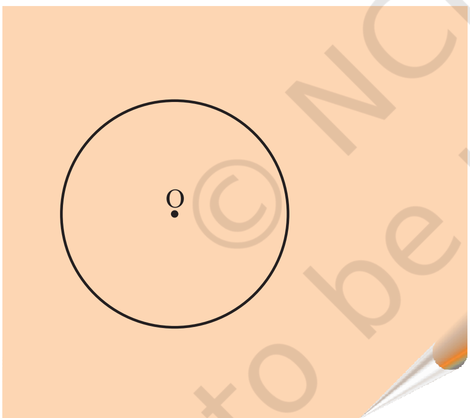
यह सत्यापित करना कि किसी बाहरी बिंदु से एक वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

आवश्यक सामग्री

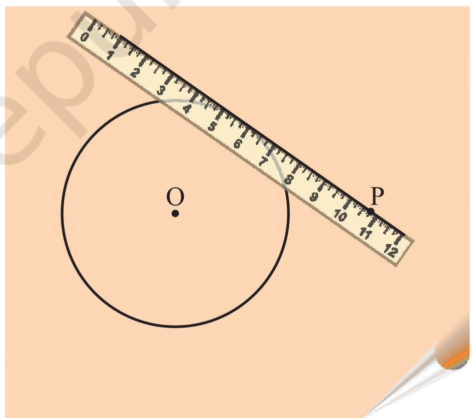
विभिन्न रंगों के चिकने काग़ज़, ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, कैंची, कटर, गोंद।

रचना की विधि

1. केंद्र O और कोई भी त्रिज्या a इकाई लेकर, एक सुविधाजनक माप के रंगीन चिकने काग़ज़ पर एक वृत्त खींचिए (देखिए आकृति 1)।
2. वृत्त के बाहर स्थित कोई बिंदु P लीजिए।
3. बिंदु P और वृत्त को स्पर्श करता हुआ एक रूलर रखिए। काग़ज़ को उठाकर इसे मोड़िए ताकि P से होकर एक मोड़ का निशान प्राप्त हो जाए (देखिए आकृति 2)।

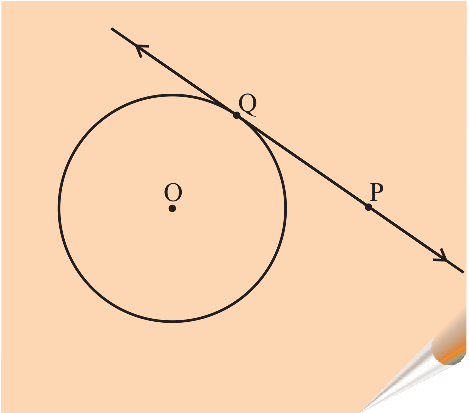


आकृति 1

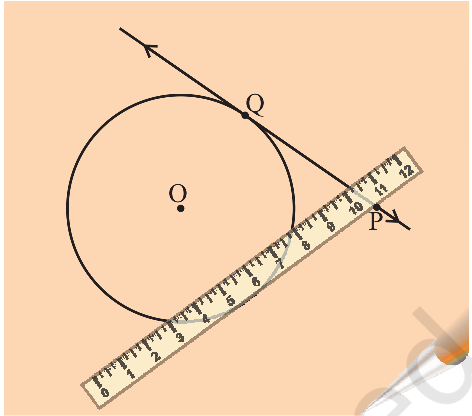


आकृति 2

4. इस प्रकार प्राप्त मोड़ का निशान P से वृत्त पर एक स्पर्श रेखा है। वृत्त और स्पर्श रेखा के स्पर्श बिंदु को Q से अंकित कीजिए। PQ को मिलाइए (देखिए आकृति 3)।
5. अब, रूलर को वृत्त के दूसरी ओर इस प्रकार रखिए कि वह P और वृत्त को स्पर्श करे। काग़ज़ को पुनः मोड़कर एक मोड़ का निशान बनाइए (देखिए आकृति 4)।



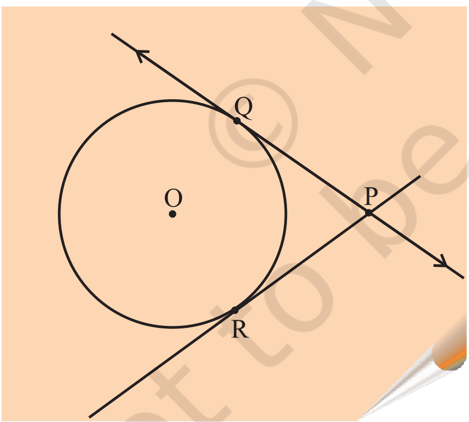
आकृति 3



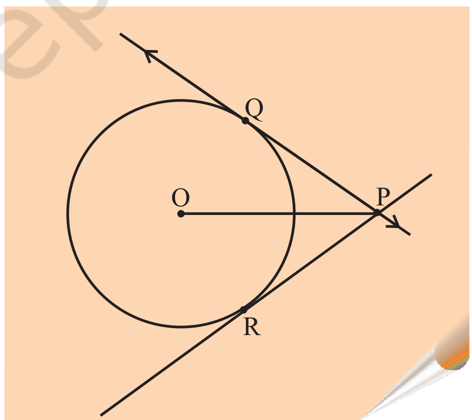
आकृति 4

6. यह मोड़ का निशान बिंदु P से वृत्त पर दूसरी स्पर्श रेखा है। इस स्पर्श रेखा और वृत्त के स्पर्श बिंदु को R से अंकित कीजिए। PR को मिलाइए (देखिए आकृति 5)।

7. वृत्त के केंद्र O को P से मिलाइए (देखिए आकृति 6)।



आकृति 5



आकृति 6

प्रदर्शन

1. वृत्त को OP के अनुदिश मोड़िए।

2. हम देखते हैं कि Q बिंदु R के संपाती हो जाता है। अत:, QP = RP है, अर्थात्

स्पर्श रेखा QP की लंबाई = स्पर्श रेखा RP की लंबाई।

इससे परिणाम सत्यापित हो जाता है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

1. स्पर्श रेखा QP की लंबाई = ... है।
2. स्पर्श रेखा RP की लंबाई = ... है।

   अत: स्पर्श रेखा QP की लंबाई = स्पर्श रेखा .... की लंबाई है।

अनुप्रयोग

यह परिणाम ज्यामिति और मेंसुरेशन के अनेक प्रश्नों को हल करने में सहायक रहता है।

क्रियाकलाप 25

उद्देश्य

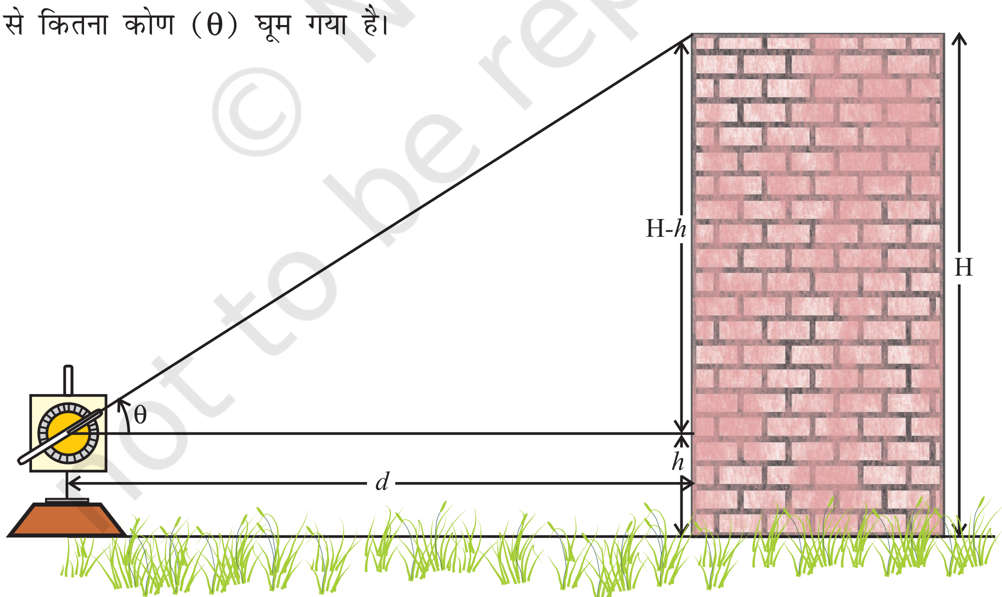
एक कोणमापक या क्लिनोमीटर (Clinometer) का प्रयोग करते हुए, किसी भवन की ऊँचाई ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

क्लिनोमीटर (एक स्टैंड जिसमें एक वर्ग प्लेट लगी है, जिस पर एक चलायमान 0º–360º चाँदा और एक (खोखली डंडी) स्ट्रा (straw) लगी हो, 50 m लंबा दूरी मापने वाला फीता, मेज या स्टूल।

रचना की विधि

1. स्कूल के मैदान पर एक मेज रखिए।
2. इस मेज पर एक क्लिनोमीटर (0º–360º चाँदे और स्ट्रॉ लगा हुआ एक स्टैंड जिसकी केंद्रीय रेखा 0º–360º रेखा के संपाती रहे) रखिए।
3. अब इसे स्कूल के भवन के सामने लाइए।
4. स्ट्रॉ के माध्यम से भवन के शीर्ष को झाँककर देखिए तथा लिखिए कि चाँदा 0º–360º रेखा से कितना कोण (θ) घूम गया है।



आकृति 1

5. चाँदे के केंद्र की भूमि से ऊँचाई (h) मापिए।
6. मेज़ पर रखे स्टैंड की ऊर्ध्वाधर रेखा पर स्थित बिंदु (चाँदे के केंद्र) से भवन की दूरी (d) को मापिए (देखिए आकृति 1)।
7. क्लिनोमीटर को विभिन्न स्थितियों पर रखकर उपरोक्त विधि को दोहराइए तथा विभिन्न व्यवस्थाओं के लिए θ, h और d के मान एकत्रित कीजिए।

प्रदर्शन

त्रिकोणमितीय अनुपातों के ज्ञान का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$\tan\theta = \dfrac{H - h}{d}$, जहाँ H भवन की ऊँचाई है।

अर्थात, $H = h + d\tan\theta$

प्रेक्षण

क्रम सं.	चाँदे द्वारा मापा गया कोण (उन्नयन कोण) θ	भूमि से चाँदे की ऊँचाई (h)	चाँदे के केंद्र से भवन की दूरी (d)	$\tan\theta$	$H = h + d\tan\theta$
1.	----	---	---	---	---
2.	----	---	---	---	---
3.	----	---	---	---	---
...	----	---	---	---	---
...	----	---	---	---	---
...					

अनुप्रयोग

1. क्लिनोमीटर का प्रयोग उन्नयन कोण और अवनमन कोण मापने में किया जाता है।
2. इसका दूरस्थ (अग्रहणीय) वस्तुओं की ऊँचाइयाँ ज्ञात करने में किया जा सकता है, जहाँ ऊँचाइयों को प्रत्यक्ष रूप से मापना कठिन होता है।

क्रियाकलाप 26

उद्देश्य

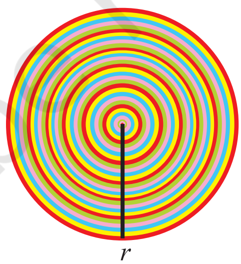
प्रायोगिक रूप से एक वृत्त के क्षेत्रफल के लिए सूत्र प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

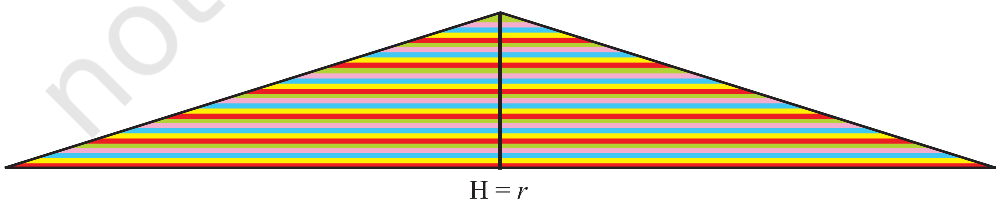
विभिन्न रंगों के धागे, कैंची, कार्ड बोर्ड, मोटे काग़ज़ की शीट, गोंद, रूलर (पटरी)।

रचना की विधि

1. एक मोटे काग़ज़ की शीट पर, मान लीजिए, त्रिज्या r का एक वृत खींचिए, इसे काट कर निकाल लीजिए तथा कार्ड बोर्ड पर चिपकाइए।
2. विभिन्न मापों के रंगीन धागे युग्मों में काट लीजिए।
3. वृत्त पर विभिन्न मापों के रंगीन धागों के एक समुच्चय को सकेंद्रीय प्रतिरूप या पैटर्न में इस प्रकार चिपकाकर कि उनके बीच में कोई रिक्तता न रहे तथा वृत्त पूर्णतया भर जाए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।
4. रंगीन धागों के दूसरे समुच्चय को सबसे छोटे से प्रारंभ करके सबसे बड़े तक के प्रतिरूप या पैटर्न में आकृति 2 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए। इस प्रतिरूप में अंतिम धागा उसी रंग और उसी माप का होगा जो वृत्त के अंतिम धागे का है, जैसा आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 1



आकृति 2

प्रदर्शन

1. वृत्त पर चिपकाए गए धागों की संख्या और माप तथा त्रिभुज के रूप में चिपकाए गए धागों की संख्या और माप एक ही हैं।
2. अत:, धागों द्वारा वृत्त पर ढका क्षेत्रफल तथा धागों द्वारा निर्मित त्रिभुजाकार आकृति का क्षेत्रफल एक ही हैं।
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई।
4. त्रिभुज का आधार वृत्त की परिधि ($2\pi r$) के बराबर है तथा त्रिभुज की ऊँचाई वृत्त की त्रिज्या r के बराबर है।
5. वृत्त का क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$ है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

1. त्रिभुज का आधार = ------- इकाई
2. त्रिभुज की ऊँचाई = ------- इकाई (अर्थात वृत्त की त्रिज्या)
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार $\times$ संगत ------) वर्ग इकाई
4. वृत्त का क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षेत्रफल = ------------------.

अनुप्रयोग

इस परिणाम का प्रयोग वृत्ताकार और अर्धवृत्ताकार फूलों की क्यारियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने तथा साथ ही वृत्ताकार डिज़ाइनों को बनाने और एक फ़र्श को ढकने में लगने वाली वृत्ताकार टाइलों की संख्या का आकलन करने में किया जाता है।

टिप्पणी

धागा जितना पतला होगा उतनी ही परिशुद्धता प्राप्त होगी। आकृति 2 स्केल के अनुसार नहीं बनी है।

क्रियाकलाप 27

उद्देश्य

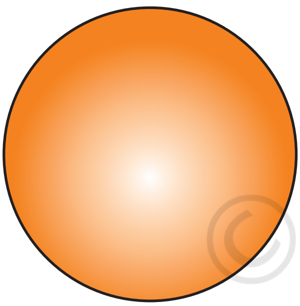
शंकु का एक छिन्नक बनाना।

आवश्यक सामग्री

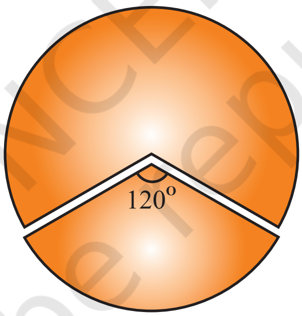
ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, सेलोटेप, एक्रिलिक शीट, कटर।

रचना की विधि

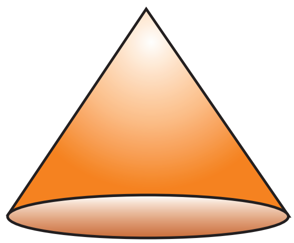
1. सुविधाजनक माप की एक एक्रिलिक शीट में से एक उपयुक्त त्रिज्या का वृत्त काट लीजिए (देखिए आकृति 1)।
2. इस वृत्त में से, मान लीजिए, 120° कोण का एक त्रिज्यखंड काट लीजिए (देखिए आकृति 2)।
3. इस त्रिज्यखंड से, इसके दोनों सिरों को त्रिज्यखंड की त्रिज्याओं के अनुदिश जोड़कर, आकृति 3 में दर्शाए अनुसार एक शंकु बनाइए।



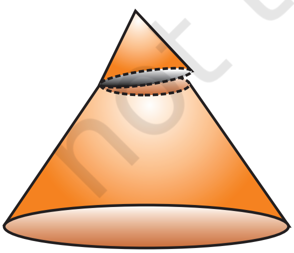
आकृति 1



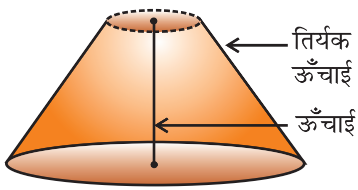
आकृति 2



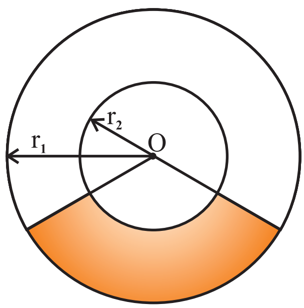
आकृति 3



आकृति 4



आकृति 5



आकृति 6

4. इस शंकु में से एक छोटा शंकु इस प्रकार काट लीजिए कि छोटे शंकु का आधार प्रारंभिक शंकु के आधार के समांतर हो (देखिए आकृति 4)।
5. ठोस बचा हुआ का भाग आकृति 5 में दर्शाया गया है।

प्रदर्शन

आकृति 5 में दर्शाया गया ठोस शंकु का एक छिन्नक कहलाता है। इसका आधार और शीर्ष भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के दो वृत्त हैं। इस शंकु की ऊँचाई आधार और शीर्ष वाले वृत्तों के केंद्रों को मिलाने वाले रेखाखंड की लंबाई है। छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई प्रारंभिक शंकु की तिर्यक ऊँचाई और काटे गए शंकु की तिर्यक ऊँचाई का अंतर है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

छिन्नक के आधार की त्रिज्या = ____________

छिन्नक के शीर्ष की त्रिज्या = ____________

प्रारंभिक शंकु की तिर्यक ऊँचाई = ____________

काटे गए शंकु की तिर्यक ऊँचाई = ____________

छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई = ____________

प्रारंभिक शंकु की ऊँचाई = ____________

काटे गए शंकु की ऊँचाई = ____________

छिन्नक की ऊँचाई = ____________

छिन्नक की ऊँचाई = दोनों ________ की ऊँचाइयों का अंतर

छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई = दोनों ________ की तिर्यक ऊँचाइयों का अंतर

अनुप्रयोग

1. इस क्रियाकलाप का प्रयोग शंकु के छिन्नक से संबंधित अवधारणाओं को स्पष्ट करने में किया जा सकता है।
2. छिन्नक के आकार की वस्तुएँ हमारे दैनिक जीवन में बहुत प्रयोग की जाती है, जैसे बाल्टियाँ, गिलास, लैंप शेड, इत्यादि।

टिप्पणी

छिन्नक बनाने की एक वैकल्पिक विधि

त्रिज्या r_1 और r_2 $(r_1 > r_2)$ वाले दो वृत्त एक एक्रिलिक शीट पर खींचिए। बड़े वृत्त का एक त्रिज्यखंड अंकित कीजिए तथा छायांकित भाग को काट लीजिए (आकृति 6)। अब इसे मोड़कर शंकु का छिन्नक बनाइए।

क्रियाकलाप 28

उद्देश्य

एक शंकु के छिन्नक के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के लिए सूत्र प्राप्त करना।

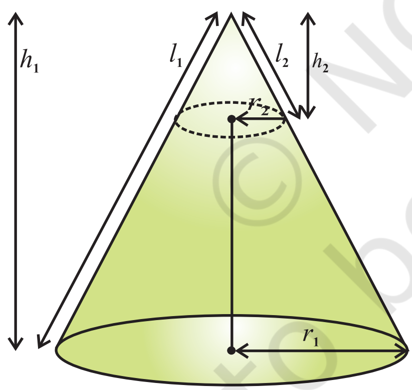
आवश्यक सामग्री

एक्रिलिक शीट, ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, सेलोटेप।

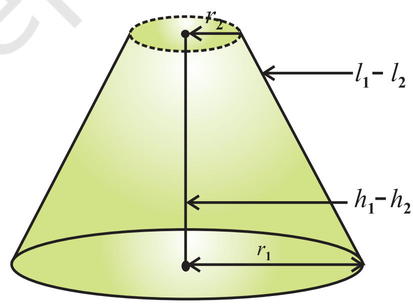
रचना की विधि

1. एक एक्रिलिक शीट का प्रयोग करते हुए, एक बड़े शंकु में से एक छोटा शंकु काटकर, शंकु का एक छिन्नक प्राप्त कीजिए, जैसा कि क्रियाकलाप 27 में स्पष्ट किया गया है (देखिए आकृति 1 और 2)।

2. बड़े शंकु और छोटे शंकु की त्रिज्याओं को क्रमशः r_1 और r_2 से नामांकित कीजिए। साथ ही, बड़े शंकु और छोटे शंकु की तिर्यक ऊँचाइयों को क्रमशः l_1 और l_2 तथा बड़े शंकु और छोटे शंकु की ऊँचाइयों को क्रमशः h_1 और h_2 से नामांकित कीजिए।



आकृति 1



आकृति 2

प्रदर्शन

पृष्ठीय क्षेत्रफल– (i) छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बड़े शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल – छोटे शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2 +$ शीर्ष और आधार के क्षेत्रफल

$$= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2 + \pi r_2^2 + \pi r_1^2$$

आयतन– छिन्नक का आयतन = बड़े शंकु का आयतन – छोटे शंकु का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$$

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

r_1 = ____________, r_2 = ______________

h_1 = ____________, h_2 = ______________

l_1 = ____________, l_2 = ______________

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = __________________________ है।

छिन्नक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = ____________________________ है।

छिन्नक का आयतन = ____________________________ है।

अनुप्रयोग

इन परिणामों का प्रयोग शंकु के एक छिन्नक रूप के आकार के बर्तन या वस्तुएँ बनाने में लगने वाली आवश्यक सामग्री ज्ञात करने में तथा उनकी धारिताएँ ज्ञात करने में भी किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 29

उद्देश्य

"से कम प्रकार" की एक संचयी बारंबारता वक्र (एक तोरण) खींचना।

आवश्यक सामग्री

रंगीन चार्ट पेपर, रूलर, वर्गांकित काग़ज़, स्कैच पेन, सेलोटेप, कटर, गोंद।

रचना की विधि

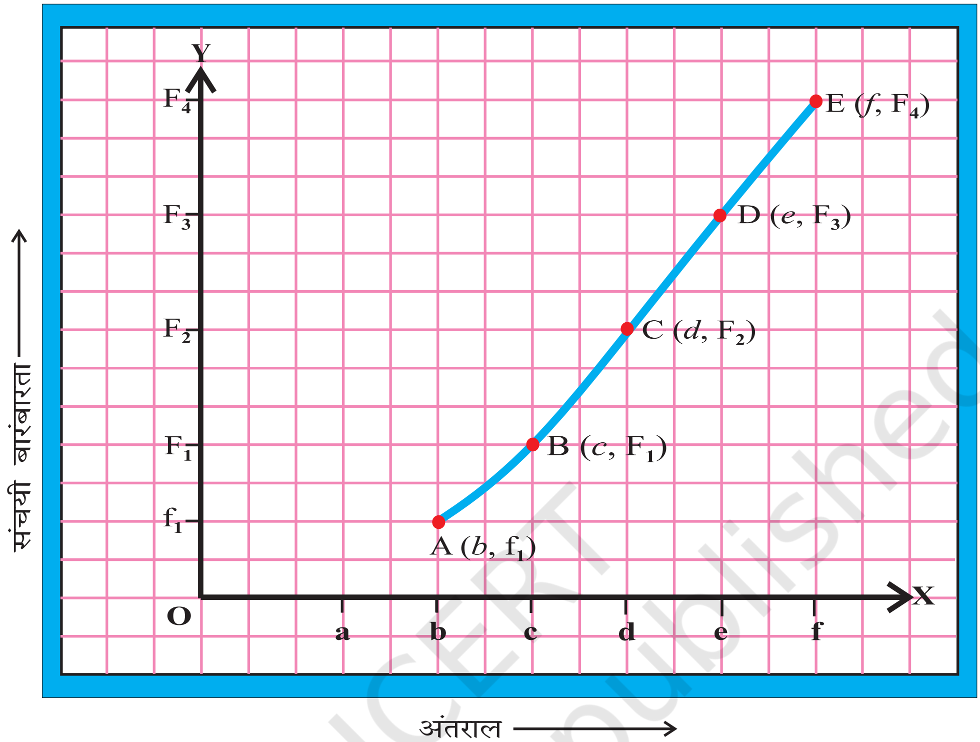
1. अपने स्कूल के विद्यार्थियों की ऊँचाइयों के आँकड़े एकत्रित कीजिए तथा, मान लीजिए पाँच वर्गों वाली एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए, जैसी नीचे दर्शाई गई है–

ऊँचाई	a-b	b-c	c-d	d-e	e-f
बारंबारता	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5

2. उपरोक्त आँकड़ों से कम प्रकार की एक संचयी बारंबारता सारणी बनाइए, जैसी नीचे दी गई है–

ऊँचाई	b से कम	c से कम	d से कम	e से कम	f से कम
बारंबारता	f_1	f_1+f_2 (मान लीजिए F_1)	$f_1+f_2+f_3$ (मान लीजिए F_2)	$f_1+f_2+f_3+f_4$ (मान लीजिए F_3)	$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5$ (मान लीजिए F_4)

3. माप 15 cm × 15 cm का एक वर्गांकित काग़ज़ लेकर उसे एक रंगीन चार्ट पेपर पर चिपकाइए।
4. वर्गांकित काग़ज़ पर दो परस्पर लंब रेखाएँ OX और OY खींचिए तथा इन्हें चरण 2 वाले आँकड़ों की आवश्यकतानुसार अंशांकित कीजिए, अर्थात् विभाजन के बिंदुओं पर संख्याएँ अंकित कीजिए।
5. वर्गांकित काग़ज़ पर बिंदुओं A (b, f_1), B (c, F_1), C (d, F_2), D (e, F_3) और E (f, F_4) को आलेखित कीजिए।
6. एक स्कैच पेन का प्रयोग करते हुए, इन बिंदुओं को एक मुक्त हस्त वक्र द्वारा मिलाइए, जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

प्रदर्शन

यह वक्र ऊपर चढ़ती हुई वक्र है, जिसमें संचयी बारंबारताएँ नीचे से ऊपर की ओर बढ़ रही हैं। यह "से कम प्रकार का तोरण" कहलाती हैं।

प्रेक्षण

अंतराल–

a-b = __________, b-c = __________, c-d = __________, d-e = __________, e-f = ____________ है।

f_1 = ____________, f_2 = ____________, f_3 = ____________, f_4 = ____________, f_5 = ____________ है।

F_1 = ____________, F_2 = ____________,

F_3 = ____________, F_4 = ____________ है।

A के निर्देशांक = ________________________ हैं।

B के निर्देशांक = ________________________ हैं।

C के निर्देशांक = ________________________ हैं।

D के निर्देशांक = ________________________ हैं।

E के निर्देशांक = ________________________ हैं।

बिंदुओं A, B, C, D और E को मिलाने पर प्राप्त की गई मुक्त हस्त वक्र ____________ प्रकार ____________ है।

अनुप्रयोग

इस तोरण का आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करने में प्रयोग किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 30

उद्देश्य

"से अधिक प्रकार" की संचयी बारंबारता वक्र (या एक तोरण) खींचना।

आवश्यक सामग्री

रंगीन चार्ट पेपर, रूलर, वर्गांकित काग़ज़, स्कैच पेन, सेलोटेप, कटर, गोंद।

रचना की विधि

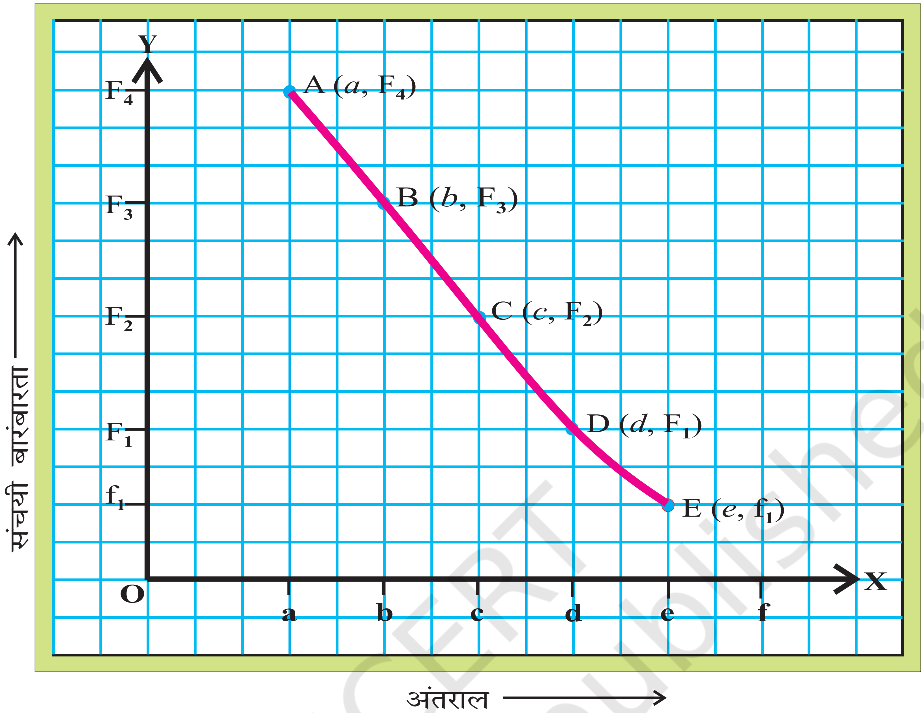
1. अपने स्कूल के विद्यार्थियों की ऊँचाइयों के आँकड़े एकत्रित कीजिए तथा उनकी एक बारंबारता बंटन सारणी नीचे दर्शाए अनुसार बनाइए :

ऊँचाई	a-b	b-c	c-d	d-e	e-f
बारंबारता	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5

2. उपरोक्त आँकड़ों के लिए, "से अधिक प्रकार की एक" संचयी बारंबारता सारणी बनाइए जैसी नीचे दी गई है:

ऊँचाई	a से अधिक या उसके बराबर	b से अधिक या उसके बराबर	c से अधिक या उसके बराबर	d से अधिक या उसके बराबर	e से अधिक या उसके बराबर
संचयी बारंबारता	$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5$ (मान लीजिए F_4)	$f_1+f_2+f_3+f_4$ (मान लीजिए F_3)	$f_1+f_2+f_3$ (मान लीजिए F_2)	f_1+f_2 (मान लीजिए F_1)	f_1

3. माप 15 cm × 15 cm का एक वर्गांकित कागज लीजिए और उसे एक रंगीन चार्ट पेपर पर चिपकाइए।
4. वर्गांकित कागज पर दो परस्पर लंब रेखाएँ OX और OY खींचिए तथा इन्हें चरण 2 वाले आँकड़ों की आवश्यकतानुसार अंशांकित कीजिए, अर्थात् विभाजन के बिंदुओं पर संख्याएँ अंकित कीजिए।
5. वर्गांकित काग़ज़ पर बिंदुओं A (a, F_4), B (b, F_3), C (c, F_2), D (d, F_1) और E (e, f_1) को आलेखित कीजिए।
6. स्कैच पेन का प्रयोग करते हुए, इन आलेखित बिंदुओं को एक मुक्त हस्त वक्र द्वारा मिलाइए, जैसा आकृति 1 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

प्रदर्शन

आकृति 1 में दर्शित वक्र एक गिरती हुई वक्र है, जिसकी संचयी बारंबारताएँ उच्च बारंबारता से निम्न बारंबारता की ओर कम हो रही हैं। यह 'से अधिक प्रकार' की एक संचयी बारंबारता सारणी या एक तोरण है।

प्रेक्षण

वर्ग अंतराल है–

a-b = ___________, b-c = ___________, c-d = ___________,

d-e = ___________, e-f = ___________है।

f_1 = ___________, f_2 = ___________, f_3 = ___________,

f_4 = ___________,

f_5 = ____________, F_1 = ____________, F_2 = ____________,

F_3 = ____________, F_4 = ____________है।

बिंदु A के निर्देशांक = ______________________ हैं।

बिंदु B के निर्देशांक = ______________________ हैं।

बिंदु C के निर्देशांक = ______________________ हैं।

बिंदु D के निर्देशांक = ______________________ हैं।

बिंदु E के निर्देशांक = ______________________ हैं।

बिंदुओं A, B, C, D और E को मिलाने पर प्राप्त की गई मुक्त हस्त वक्र ____________ प्रकार का ____________ है।

अनुप्रयोग

यदि एक ही वर्गांकित काग़ज़ पर, किसी बारंबारता बंटन के लिए, "से कम प्रकार का तोरण" और 'से अधिक प्रकार का तोरण' खींचे जाएँ, तो इन तोरणों के प्रतिच्छेद बिंदु के x निर्देशांक से आँकड़ों का माध्यक प्राप्त हो जाता है।

क्रियाकलाप 31

उद्देश्य

एक पासे को 500 बार फ़ेंककर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 के आने की प्रायोगिक प्रायिकता निर्धारित करना तथा इन प्रायिकताओं की तुलना इनकी सैद्धांतिक प्रायिकताओं से करना।

आवश्यक सामग्री

एक न्यायसंगत (fair) पासा, पेन, सफ़ेद काग़ज़ की शीटें।

रचना की विधि

1. कक्षा के विद्यार्थियों को उपयुक्त साइज के दस समूहों I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX और X में विभाजित कीजिए।
2. प्रत्येक समूह पासे को 50 बार फ़ेंकेगा तथा 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक के आने को देखता जाएगा।
3. प्रत्येक समूह में 1 जितनी बार आता है (बारंबारता) उसे क्रमशः $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ से व्यक्त कीजिए।
4. प्रत्येक समूह में, 1 के आने की प्रायोगिक प्रायिकता $\frac{a_1}{50}, \frac{a_2}{50}, \frac{a_3}{50}, \ldots\ldots, \frac{a_{10}}{50}$ परिकलित कीजिए।
5. 1 के आने की प्रायोगिक प्रायिकता पहले समूह, प्रथम दो समूह, प्रथम तीन समूह , ..., सभी 10 समूहों के आधार पर क्रमशः $\frac{a_1}{50}, \frac{a_1+a_2}{100}, \frac{a_1+a_2+a_3}{150}, \ldots, \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}{500}$ के रूप में परिकलित कीजिए।
6. इसी प्रकार, 2 के आने की प्रायोगिक प्रायिकता पहले समूह, प्रथम दो समूहों ...., सभी 10 समूहों के आधार पर क्रमशः $\frac{b_1}{50}, \frac{b_1+b_2}{100}, \frac{b_1+b_2+b_3}{150}, \ldots, \frac{b_1+b_2+\ldots+b_{10}}{500}$ के रूप में परिकलित कीजिए।
7. इसी प्रकार 3, 4, 5 और 6 की प्रायोगिक प्रायिकताओं को परिकलित कीजिए।

प्रदर्शन

1. प्रायिकताएँ $\frac{a_1}{50}, \frac{a_1+a_2}{100}, \frac{a_1+a_2+a_3}{150}, \ldots\ldots, \frac{a_1+a_2+a_3\ldots\ldots+a_{10}}{500}$ संख्या $\frac{1}{6}$ के निकटतम आती जाती हैं तथा अंतिम प्रायिकता $\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{10}}{500}$ संख्या $\frac{1}{6}$ के सबसे अधिक निकट है। यही स्थिति $\frac{b_1}{50}, \frac{b_1+b_2}{100}, \frac{b_1+b_2+b_3}{150}, \ldots\ldots, \frac{b_1+b_2+\ldots\ldots+b_{10}}{500}$, इत्यादि के लिए भी सत्य है।

2. घटना E (मान लीजिए 1) की सैद्धांतिक प्रायिकता = P(1)

$$= \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{6}$$

इसी प्रकार, P (2) = P (3) = P (4) = P (5) = P (6) = $\frac{1}{6}$

चरणों 1 और 2 से यह देखा जा सकता है कि प्रत्येक संख्या 1, 2, 3, 4, 5 और 6 की प्रायोगिक प्रायिकता इनकी सैद्धांतिक प्रायिकता $\frac{1}{6}$ के अति निकट है।

समूह संख्या	**एक समूह में पासे के फ़ेंकने की संख्या**	**एक संख्या कितनी बार आती है**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
I	50	a_1 =	b_1 =	c_1 =	d_1 =	e_1 =	f_1 =
II	50	a_2 =	b_2=	---	---	---	---
III	50	----	----	----	---	----	----
-	-	----	----	----	---	----	----
-	-	----	----	----	---	----	----
-	-	----	----	----	---	----	----
-	-	----	----	----	---	----	----
-	-	----	----	----	---	----	----
-	-	----	----	----	---	----	----
X	50	---	---	---	---	----	----
	योग = 500	----	----	----	---	---	---

प्रेक्षण

1. प्रत्येक समूह निम्नलिखित सारणी पूरी करेगा–

$\frac{a_1}{50}$ = ______, $\frac{a_1+a_2}{100} = \frac{\sum_{i=1}^{2} a_i}{100}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{3} a_i}{150}$ = ______,

$\frac{\sum_{i=1}^{4} a_i}{200}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{5} a_i}{250}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{6} a_i}{300}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{7} a_i}{350}$ = ______,

$\frac{\sum_{i=1}^{8} a_i}{400}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{9} a_i}{450}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{500}$ = ______

और इसी प्रकार b_i's, c_i's .... f_i's के लिए भी ऐसे ही परिकलन कीजिए।

1 की प्रायोगिक प्रायिकता $= \frac{---}{500}$

2 की प्रायोगिक प्रायिकता $= \frac{---}{500}, \ldots$

....

....

6 की प्रायोगिक प्रायिकता $= \frac{---}{500}$

1 की प्रायोगिक प्रायिकता सैद्धांतिक __________ के लगभग बराबर है।

2 की प्रायोगिक प्रायिकता सैद्धांतिक __________ के लगभग बराबर है।

....

6 की प्रायोगिक प्रायिकता __________ प्रायिकता के __________ है।

अनुप्रयोग

प्रायिकता का विस्तृत रूप से विभिन्न क्षेत्रों जैसे भौतिक विज्ञान, वाणिज्य, जैविक विज्ञान, औषधि विज्ञान, मौसम की भविष्यवाणियों इत्यादि में प्रयोग किया जाता है।

क्रियाकलाप 32

उद्देश्य

किसी सिक्के को 1000 बार उछालकर एक चित (या एक पट) आने की प्रायोगिक प्रायिकता निर्धारित करना तथा इस प्रायिकता की तुलना उसकी सैद्धांतिक प्रायिकता से करना।

आवश्यक सामग्री

एक न्यायसंगत सिक्का, पेन, सफ़ेद काग़ज़ की शीटें।

रचना की विधि

1. कक्षा के विद्यार्थियों को दस समूहों I, II, III, ..., X में विभाजित कीजिए।
2. प्रत्येक समूह एक सिक्के को 100 बार उछालेगा तथा एक चित आने को देखेगा।
3. गिनिए कि प्रत्येक समूह में चित कुल कितनी बार आता है तथा इसे क्रमशः $a_1, a_2, ..., a_{10}$, से व्यक्त कीजिए।
4. प्रत्येक समूह में, एक चित आने की प्रायोगिक प्रायिकताएँ $\frac{a_1}{100}, \frac{a_2}{100}, ..., \frac{a_{10}}{100}$ परिकलित कीजिए।
5. एक चित आने की प्रायोगिक प्रायिकताएँ प्रथम समूह, प्रथम दो समूहों, प्रथम तीन समूहों,.., सभी दस समूहों के आधार पर क्रमशः $\frac{a_1}{100}, \frac{a_1+a_2}{200}, \frac{a_1+a_2+a_3}{300}, ..., \frac{a_1+a_2+...+a_{10}}{1000}$ परिकलित कीजिए।

प्रदर्शन

1. प्रायिकताएँ $\frac{a_1}{100}, \frac{a_1+a_2}{200}, \frac{a_1+a_2+a_3}{300}, ..., \frac{a_1+a_2+......+a_{10}}{1000}$ संख्या $\frac{1}{2}$ के निकटतम आती जा रही हैं।
2. एक घटना E (एक चित) की सैद्धांतिक प्रायिकता $= P(H)$

$$= \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग में सभी परिणामों की कुल संख्या}} = \frac{1}{2}$$

चरणों 1 और 2 से यह देखा जा सकता है कि एक चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता उसकी सैद्धांतिक प्रायिकता के बहुत निकट है।

प्रेक्षण

1. प्रत्येक समूह निम्नलिखित सारणी को पूरी करेगा :

समूह	समूह में एक सिक्का उछाले जाने की संख्या	चित आने की कुल संख्या
I	100	a_1 = ______
II	100	a_2 = ______
III	100	a_3 = ______
IV	100	a_4 = ______
.	.	.
.	.	.
.	.	.
X	100	a_{10} = ______

2. $\frac{a_1}{100}$ = ______, $\frac{a_1+a_2}{200}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{2} a_i}{200}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{3} a_i}{300}$ = ______,

$\frac{\sum_{i=1}^{4} a_i}{400}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{5} a_i}{500}$ = ______, $\frac{\sum_{i=1}^{6} a_i}{600}$ = ______,

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} a_i}{700} = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad \frac{\sum_{i=1}^{8} a_i}{800} = \_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} a_i}{900} = \_\_\_\_\_\_\_, \qquad \frac{\sum_{i=1}^{10} a_i}{1000} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ है।}$$

3. एक चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता $= \dfrac{---}{1000}$ है।

4. एक चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता लगभग सैद्धांतिक __________ के बराबर है।

5. एक चित आने की __________ प्रायिकता लगभग सैद्धांतिक __________ के __________ है।

अनुप्रयोग

प्रायिकता का विस्तृत रूप से विभिन्न क्षेत्रों जैसे भौतिक विज्ञान, वाणिज्य, जैविक विज्ञान, औषधि विज्ञान, मौसम की भविष्यवाणियों इत्यादि में प्रयोग किया जाता है।

टिप्पणी

इसी प्रकार का क्रियाकलाप सिक्के पर पट आने के लिए भी किया जा सकता है।