क्रियाकलाप 11

उद्देश्य

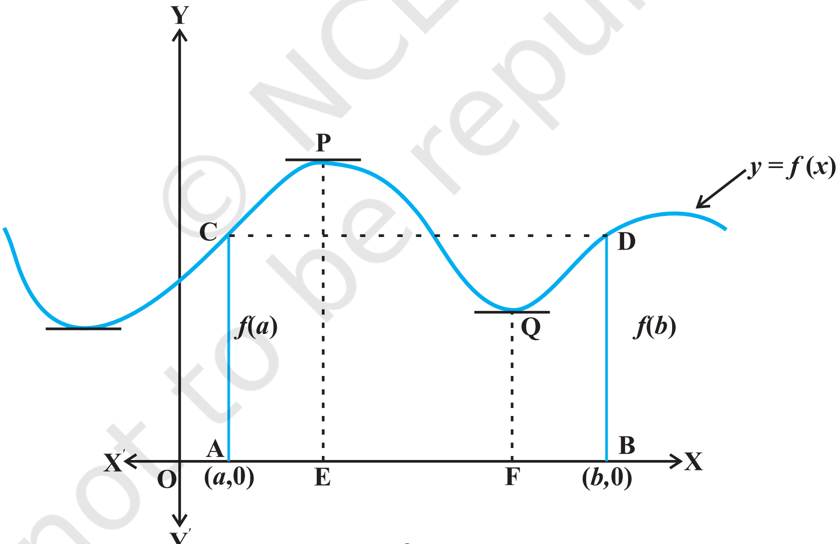
रोली प्रमेय का सत्यापन।

आवश्यक सामग्री

प्लाईवुड का एक टुकड़ा, विभिन्न लंबाइयों के तार, सफ़ेद कागज़, स्केच पेन।

रचना की विधि

1. प्लाईवुड का एक टुकड़ा लीजिए और उस पर एक सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. उपयुक्त लंबाई के दो तार लीजिए और उनको प्लाईवुड पर चिपकाए गए सफ़ेद कागज़ पर स्थिर कीजिए जिससे वे x-अक्ष और y-अक्ष को निरूपित करें (देखिए आकृति 11)।
3. 15 cm लंबाई का एक तार लीजिए उसको एक वक्र के रूप में मोड़ कर प्लाईवुड पर स्थिर कीजिए जैसा आकृति में दिखाया गया है।



आकृति 11

4. एक ही लंबाई के दो सीधे तार लीजिए और उनको इस प्रकार स्थिर कीजिए कि वे बिंदुओं A और B पर x-अक्ष के लंबवत् हों और वक्र को बिंदुओं C और D पर काटें। (देखिए आकृति 11)।

प्रदर्शन

1. माना कि आकृति में फलन $y = f(x)$ वक्र को निरूपित करता है। माना OA = a इकाई और OB = b इकाई है।
2. बिंदुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ और $(b, 0)$ हैं।
3. अंतराल $[a, b]$ में वक्र कहीं भी विच्छेदित नहीं है। इसलिए फलन f अंतराल $[a, b]$ में संतत है।
4. वक्र $x = a$ और $x = b$ के बीच निष्कोण वक्र है जिसका तात्पर्य है कि इसके प्रत्येक बिंदु पर स्पर्श रेखा खींची जा सकती है जो यह निर्देशित करती है कि फलन अंतराल (a, b) में अवकलनीय है।
5. क्योंकि A और B पर के तार समान लंबाई के हैं अर्थात् AC = BD है, इसलिए $f(a) = f(b)$ है।
6. चरणों (3), (4) और (5) से रोली प्रमेय के प्रतिबंध (शर्तें) पूरे होते हैं। आकृति 11 से हम अवलोकन करते हैं कि P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समांतर हैं। इसलिए P तथा Q पर $f'(x)$ शून्य के बराबर है।

इस प्रकार, (a, b) में x के कम से कम एक मान c का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f'(x) = 0$ है।

प्रेक्षण

आकृति 11 से

a = _______________, b = ______________

$f(a)$ = ____________, $f(b)$ = _________. क्या $f(a) = f(b)$? (हाँ/नहीं)

P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता = __________ है। इसलिए P पर $f'(x)$ = __________ है।

अनुप्रयोग

इस प्रमेय का प्रयोग समीकरण के मूल ज्ञात करने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 12

उद्देश्य

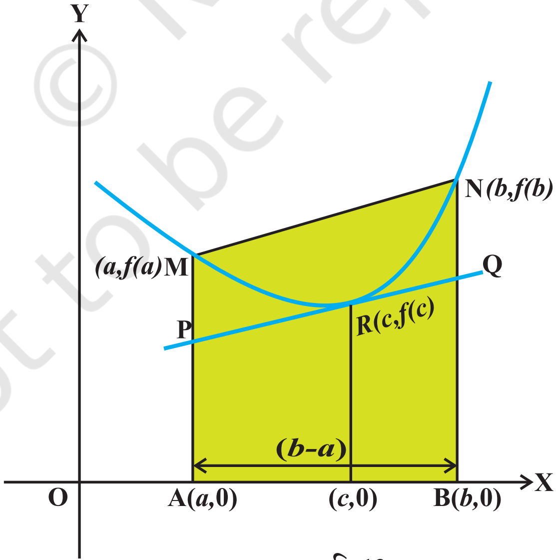
लैग्रांजियन माध्यमान प्रमेय का सत्यापन करना

आवश्यक सामग्री

प्लाईवुड का एक टुकड़ा, तार, सफ़ेद कागज़, स्केच पेन, गोंद।

रचना की विधि

1. प्लाईवुड का एक टुकड़ा लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. उपयुक्त लंबाई के दो तार लीजिए और उनको प्लाईवुड के ऊपर चिपके कागज़ पर इस प्रकार स्थिर कीजिए कि वे x-अक्ष और y-अक्ष निरूपित करें। (देखिए आकृति 12)
3. 10 cm लंबाई का एक तार लेकर और इसे मोड़ कर एक वक्र के आकार का बनाइए और प्लाईवुड पर चिपके सफ़ेद कागज़ पर स्थिर कीजिए जैसा आकृति 12 में दिखाया गया है।



आकृति 12

4. 10 cm और 13 cm के दो सीधे तार लीजिए और उनको दो अलग-अलग बिंदुओं पर, y-अक्ष के समांतर इस प्रकार स्थिर कीजिए कि इनके पाद x-अक्ष पर मिलें तथा उन दोनों बिंदुओं को जहाँ दोनों ऊर्ध्वाधर तार वक्र पर मिलते हैं, एक अन्य तार द्वारा जोड़िए।

5. एक उपयुक्त लंबाई का एक अन्य तार लीजिए और इसको उस प्रकार स्थिर कीजिए कि वह वक्र को स्पर्श करे और वक्र के दोनों बिंदुओं को मिलाने वाले तार के समांतर हो (देखिए आकृति 12)।

प्रदर्शन

1. माना वक्र फलन $y = f(x)$ को निरूपित करता है। आकृति में माना OA = a इकाई और OB = b इकाई है।
2. A और B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ और $(b, 0)$ है।
3. MN, बिंदुओं M $[a, f(a)]$ और N $(b, f(b))$ को मिलाने वाली जीवा है।
4. PQ, अंतराल (a, b) में वक्र के बिंदु R पर एक स्पर्श रेखा को निरुपित करती है।
5. $f'(c)$, $x = c$ पर स्पर्श रेखा PQ की प्रवणता है।
6. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, जीवा MN की प्रवणता है।
7. MN, PQ के समांतर है, इसलिए $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ इस प्रकार लैग्रांजियन माध्यमान प्रमेय का सत्यापन किया जाता है।

प्रेक्षण

1. a = ___________, b = ___________,

   $f(a)$ = _________, $f(b)$ = _____________,
2. $f(a) - f(b)$ = _________,

   $b - a$ = _________,

3. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = ________ = MN की प्रवणता

4. चूँकि PQ ∥ MN $\Rightarrow$ PQ की प्रवणता $= f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

प्रेक्षण

लैग्रांजियन माध्यमान प्रमेय का कलन में महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है। उदाहरण के लिए, इस प्रमेय का, वक्र की अवतलता की व्याख्या करने में प्रयोग किया जाता है।

क्रियाकलाप 13

उद्देश्य

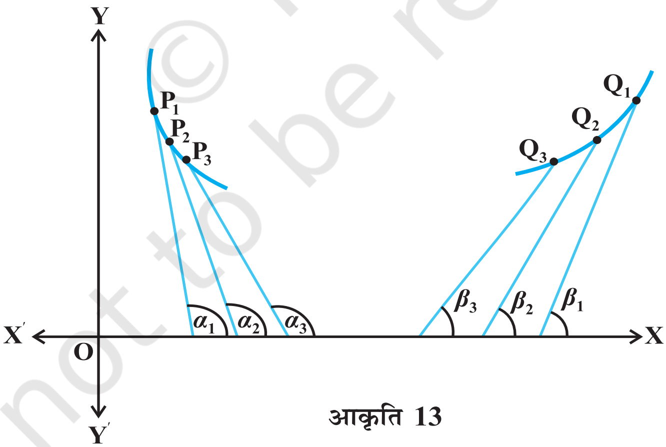
ह्रासमान और वर्धमान फलनों की संकल्पना को समझना।

आवश्यक सामग्री

विभिन्न लंबाइयों के तार, उपयुक्त आकार का प्लाईवुड का टुकड़ा, सफ़ेद कागज़, चिपकाने वाला पदार्थ, ज्यामिति बॉक्स, त्रिकोणमितीय सारणी।

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक प्लाईवुड का टुकड़ा लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. 20 cm (मान लीजिए) की लंबाई के दो तारों का टुकड़ा लीजिए और उनको सफ़ेद कागज पर x-अक्ष और y-अक्ष को निरुपित करते हुए स्थिर कीजिए।
3. उपयुक्त लंबाई के दो और तार लीजिए और उनको दो फलनों को निरुपित करने वाले वक्रों के रूप में मोड़कर स्थिर कीजिए जैसा आकृति 13 में दिखाया गया है।



आकृति 13

4. वक्रों के विभिन्न बिंदुओं पर स्पर्श रेखा दिखाने के लिए उपयुक्त लंबाइयों के दो और तार लीजिए।

प्रदर्शन

1. एक सीधा तार लीजिए और इसे वक्र (बाईं ओर वाली) पर इस प्रकार रखिए कि वह वक्र के बिंदु P_1 पर स्पर्श रेखा बनाए और x-अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण α_1 बनाए।
2. α_1 एक अधिक कोण है इसलिए $\tan\alpha_1$ ऋणात्मक है अर्थात् P_1 पर स्पर्श रेखा की प्रवणता (फलन के बिंदु P_1 पर अवकलज) ऋणात्मक है।
3. उसी वक्र पर दो बिंदु P_2 और P_3 लीजिए और उसी तार का प्रयोग करके P_2 और P_3 पर x-अक्ष की धनात्मक दिशा से क्रमशः α_2 और α_3 कोण बनाते हुए स्पर्श रेखा बनाइए।
4. यहाँ पुनः α_2 और α_3 अधिक कोण हैं और इसलिए स्पर्श रेखाओं की प्रवणता $\tan\alpha_2$ और $\tan\alpha_3$ दोनों ही ऋणात्मक हैं अर्थात् P_2 और P_3 पर फलन के अवकलज ऋणात्मक हैं।
5. वक्र (बाईं ओर वाला) द्वारा दिया गया फलन एक ह्रासमान फलन है।
6. वक्र (दाईं ओर वाला) पर के दाईं ओर तीन बिंदु Q_1, Q_2, Q_3 लीजिए और दूसरे सीधा तार के प्रयोग से प्रत्येक बिंदु पर x-अक्ष की धनात्मक दिशा से क्रमशः कोण $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ बनाती हुई स्पर्श रेखा बनाइए। जैसा कि आकृति में दिखाया गया है $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ सभी न्यून कोण है। इसलिए, इन बिंदुओं पर फलनों के अवकलज धनात्मक हैं। अतः इस वक्र (दाईं ओर) द्वारा दिया गया फलन एक वर्धमान फलन है।

प्रेक्षण

मापने पर (डिग्री के सन्निकट)

1. α_1 = _______ , > 90° α_2 = _______ > _______, α_3 = _______> _______, $\tan\alpha_1$ = _______, (ऋणात्मक) $\tan\alpha_2$ = _______, (_______), $\tan\alpha_3$ = _______, (_______). इस प्रकार, फलन एक _______है।
2. β_1 = _______< 90°, β_2 = _______, < _______, β_3 = _______ , < _______

   $\tan\beta_1$ = _______ , (धनात्मक), $\tan\beta_2$ = _______, (_______), $\tan\beta_3$ = _______(_______). इस प्रकार, फलन एक _______फलन है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप वर्धमान और ह्रासमान फलनों की संकल्पना की व्याख्या करने में सहायक हो सकता है।

क्रियाकलाप 14

उद्देश्य

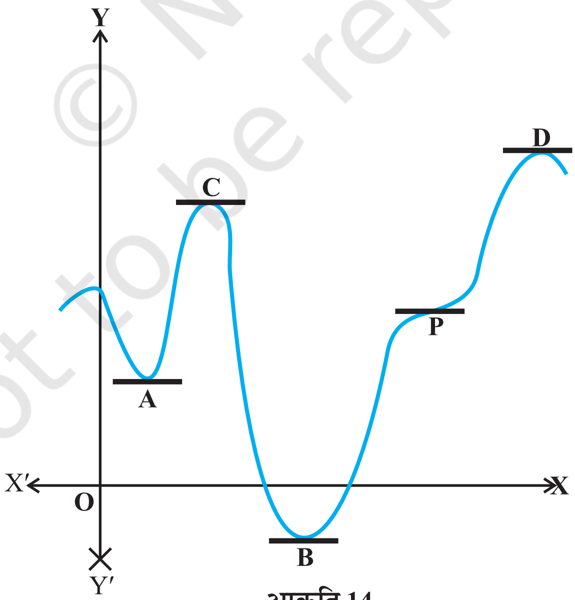
स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु, स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु और नति परवर्तन बिंदु की संकल्पना को समझना।

आवश्यक सामग्री

उपयुक्त आकार का एक प्लाईवुड का टुकड़ा, तार, गोंद, सफ़ेद कागज़।

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक प्लाईवुड का टुकड़ा लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. 40 cm लंबाई के दो तार लीजिए और उनको प्लाईवुड पर चिपके सफ़ेद कागज़ पर इस प्रकार स्थिर कीजिए कि वे x-अक्ष और y-अक्ष को निरुपित करें।
3. उपयुक्त लंबाई का एक अन्य तार लीजिए और उसको एक वक्र के आकार में मोड़िए। इस वक्राकार तार को प्लाईवुड पर चिपके सफ़ेद कागज़ पर आकृति 14 में दिखाए गए अनुसार स्थिर कीजिए।



आकृति 14

4. 2 cm लंबाई के 5 तार और लीजिए और उनको बिंदुओं A, C, B, P और D पर, आकृति में दिखाए गए भाँति, स्थिर कीजिए।

प्रदर्शन

1. आकृति में बिंदुओं A, B, C और D पर स्थिर तारें वक्र की स्पर्श रेखाओं को निरुपित करती हैं और x-अक्ष के समांतर हैं। इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य है। अर्थात, इन बिंदुओं पर फलन के प्रथम अवकलज शून्य हैं। बिंदु P पर स्पर्श रेखा वक्र को प्रतिच्छेदित करती है।
2. बिंदुओं A और B पर बाईं से दाईं ओर अग्रसर होने पर, प्रथम अवकलज का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है। इसलिए ये बिंदु स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु के संगत है।
3. बिंदुओं C और D पर बाईं से दाईं ओर अग्रसर होते हैं, तो प्रथम अवकलज का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है। इसलिए ये स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु के संगत है।
4. बिंदु P पर प्रथम अवकलज के चिह्न में परिवर्तन नहीं होता है। इसलिए यह नति परिवर्तन बिंदु है।

प्रेक्षण

1. बिंदु A के बाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता (प्रथम-अवकलज)________है।
2. बिंदु A के दाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता (प्रथम अवकलज)________है।
3. बिंदु B के बाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर प्रथम अवकलज ________है।
4. बिंदु B के दाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर प्रथम अवकलज ________है।
5. बिंदु C के बाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर प्रथम अवकलज ________है।
6. बिंदु C के दाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर प्रथम अवकलज ________है।
7. बिंदु D के बाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर प्रथम अवकलज ________है।
8. बिंदु D के दाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर प्रथम अवकलज ________है।

9. बिंदु P के बाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर प्रथम अवकलज ________ है और दाईं ओर निकटस्थ एक बिंदु पर ________है।

10. A और B स्थानीय ________ है।

11. C और D स्थानीय ________ है।

12. P एक ________बिंदु है।

अनुप्रयोग

1. यह क्रियाकलाप स्थानीय उच्चिष्ठ, स्थानीय निम्निष्ठ और स्थानीय नति परिवर्तन के बिंदुओं की संकल्पना को समझने में सहायक हो सकता है।

2. उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ की संकल्पना दैनिक जीवन से संबंधित समस्याओं जैसे अधिकतम क्षमता के पैकेट निम्नतम लागत से बनाने के लिए उपयोगी है।

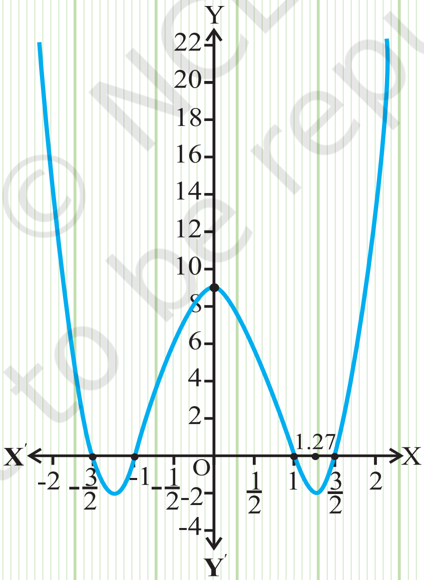
क्रियाकलाप 15

उद्देश्य

एक दिए गए अंतराल में फलन के निरपेक्ष उच्चतम मान और निरपेक्ष निम्नतम मान की संकल्पना को इनके आरेखों की सहायता से समझना।

आवश्यक सामग्री

ड्राइंग–बोर्ड, ग्राफ़ पेपर, गोंद, ज्यामिति बाक्स, पेंसिल, इरेज़र, स्केच पेन, रूलर, कैलकुलेटर।



आकृति 15

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का ग्राफ़ पेपर ड्राइंग बोर्ड पर चिपकाइए।
2. ग्राफ़ पेपर पर दो परस्पर लंब रेखाएँ खींचिए जो x और y अक्षों को निरूपित करें।
3. दोनों अक्षों को आकृति 15 में दिखाए गए भाँति अंशांकित कीजिए।
4. मान लीजिए कि अंतराल $[-2, 2]$ में दिया गया फलन $f(x) = (4x^2 - 9)(x^2 - 1)$ है।
5. $[-2, 2]$ में x के विभिन्न मान लेकर $f(x)$ के मान ज्ञात कीजिए और क्रमित युग्मों $(x, f(x))$ को आलेखित कीजिए।
6. आकृति में दिखाए गए भाँति आलेखित बिंदुओं को मुक्त हस्त से मिलाकर वक्र बनाइए।

प्रदर्शन

1. $f(x)$ को संतुष्ट करने वाले कुछ क्रमित युग्म निम्न हैं

x	0	± 0.5	± 1.0	1.25	1.27	± 1.5	± 2
$f(x)$	9	6	0	– 1.55	–1.56	0	21

2. इन बिंदुओं को ग्राफ़ पेपर पर आलेखित कीजिए और उनको मुक्त-हस्त से मिलाकर वक्र प्राप्त कीजिए जैसा आकृति में दिखाया गया है।

प्रेक्षण

1. $f(x)$ का निरपेक्ष उच्चतम मान = __________ x = _________ पर है।
2. $f(x)$ का निरपेक्ष निम्नतम मान = _________ x = __________ पर है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप एक फलन के ग्राफ़ के द्वारा निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को समझाने में उपयोगी है।

$f(x) = (4x^2 - 9)(x^2 - 1)$

$f'(x) = (4x^2 - 9)\,2x + 8x\,(x^2 - 1) = 16x^3 - 26x = 2x\,(8x^2 - 13)$

$f'(x) = 0$ से $x = 0,\ x = \pm\sqrt{\dfrac{13}{8}} = \pm 1.27$ प्राप्त होता है।

$f(0) = 9,\ f\left(\sqrt{\dfrac{13}{8}}\right) = \dfrac{-25}{16},\ f\left(-\sqrt{\dfrac{13}{8}}\right) = \dfrac{-25}{16},\ f(-2) = 21,\ f(2) = 21$

अतः f का उच्चतम निरपेक्ष मान (21) $x = \pm 2$ पर है तथा निम्नतम निरपेक्ष मान $\left(\dfrac{-25}{15}\right) x = \pm\sqrt{\dfrac{13}{8}}$ पर है।

क्रियाकलाप 16

उद्देश्य

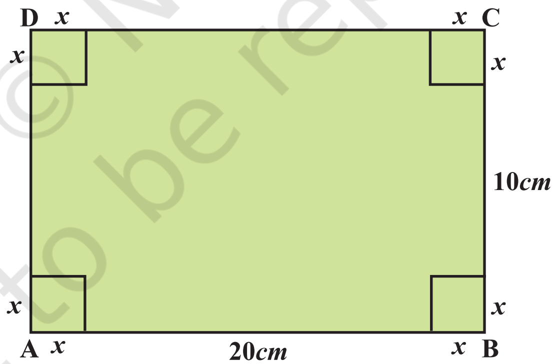
एक आयताकार शीट के प्रत्येक कोने से समान आकार के वर्ग काटकर अधिकतम आयतन का ढक्कन रहित संदूक बनाना।

आवश्यक सामग्री

चार्ट पेपर, कैंची, सेलो-टेप, कैलकुलेटर

रचना की विधि

1. 20 cm × 10 cm का एक आयताकार चार्ट पेपर लीजिए और इसको ABCD से नामांकित कीजिए।
2. प्रत्येक कोने A, B, C और D से x cm भुजा वाले चार वर्ग काटिए।
3. इसी आकार के अन्य चार्ट पेपर लेकर x के विभिन्न मानों के लिए इस प्रक्रिया को दोहराइए।
4. सेलो टेप की सहायता से फलकों को मोड़ कर ढक्कन रहित संदूक बनाइए।



आकृति 16

प्रदर्शन

1. जब $x = 1$, संदूक का आयतन = 144 cm^3
2. जब $x = 1.5$, संदूक का आयतन = 178.5 cm^3

3. जब $x = 1.8$, संदूक का आयतन = 188.9 cm^3

4. जब $x = 2$, संदूक का आयतन = 192 cm^3

5. जब $x = 2.1$, संदूक का आयतन = 192.4 cm^3

6. जब $x = 2.2$, संदूक का आयतन = 192.2 cm^3

7. जब $x = 2.5$, संदूक का आयतन = 187.5 cm^3

8. जब $x = 3$, संदूक का आयतन = 168 cm^3

स्पष्टत: संदूक का आयतन अधिकतम है जब $x = 2.1$cm है।

प्रेक्षण

1. V_1 = ढक्कन रहित संदूक का आयतन (जब $x = 1.6$) = ________
2. V_2 = ढक्कन रहित संदूक का आयतन (जब $x = 1.9$) = ________
3. V = ढक्कन रहित संदूक का आयतन (जब $x = 2.1$) = ________
4. V_3 = ढक्कन रहित संदूक का आयतन (जब $x = 2.2$) = ________
5. V_4 = ढक्कन रहित संदूक का आयतन (जब $x = 2.4$) = ________
6. V_5 = ढक्कन रहित संदूक का आयतन (जब $x = 3.2$) = ________
7. आयतन V_1 ______________ आयतन V से ____________है।
8. आयतन V_2 ______________ आयतन V से ____________है।
9. आयतन V_3 ______________ आयतन V से ____________है।
10. आयतन V_4 ______________ आयतन V से ____________है।
11. आयतन V_5 ______________ आयतन V से ____________है।

इसलिए ढक्कन रहित संदूक का आयतन अधिकतम है जब x = _________ है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप फलनों की उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ संकल्पनाओं को स्पष्ट करने में उपयोगी है। यह न्यूनतम लागत से अधिकतम आयतन वाले पैकेज तैयार करने में भी लाभकारी है।

टिप्पणी

मान लीजिए संदूक का आयतन V है।

अब $V = (20 - 2x)(10 - 2x)\,x$

या $V = 200x - 60x^2 + 4x^3$

$$\frac{dV}{dx} = 200 - 120x + 12x^2$$

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए

$\frac{dV}{dx} = 0$, अर्थात् $3x^2 - 30x + 50 = 0$

इससे प्राप्त होता है–

$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 600}}{6} = 7.9$ अथवा 2.1

$x = 7.9$ को छोड़ दीजिए। (क्यों)

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -120 + 24x$$

जब, $x = 2.1$, $\frac{d^2V}{dx^2}$ ऋणात्मक है।

अतः $x = 2.1$ पर V का मान उच्चतम होगा।

क्रियाकलाप 17

उद्देश्य

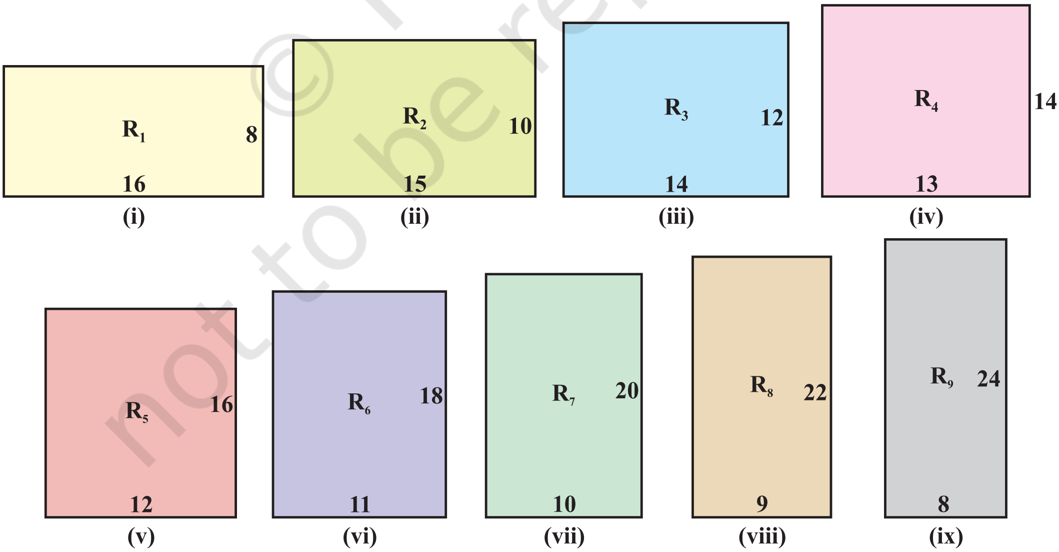
वह समय ज्ञात करना जब एक दी गई विमाओं वाले आयत का क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि उसकी लंबाई एक दी गई दर से घट रही हो और चौड़ाई दी गई दर से बढ़ रही हो।

आवश्यक सामग्री

चार्ट पेपर, पेपर कटर, स्केल (मापनी) पेंसिल, रबर (Eraser) कार्डबोर्ड

रचना की विधि

1. 16 cm × 8 cm विमाओं वाला एक आयत R_1 लीजिए।
2. मान लीजिए कि आयत की लंबाई 1cm/sec की दर से घट रही है और चौड़ाई 2cm/sec की दर से बढ़ रही है।
3. अन्य आयत $R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9$ इत्यादि, जिनकी विमाएँ क्रमशः 15 cm × 10 cm, 14 cm × 12 cm, 13 cm × 14 cm, 12 cm × 16 cm, 11 cm × 18 cm, 10 cm × 20 cm, 9 cm × 22 cm, 8 cm × 24 cm हों, बनाइए। (देखिए आकृति 17)



आकृति 17

4. इन सभी आयतों को कार्डबोर्ड में चिपकाइए।

प्रदर्शन

1. लंबाई 1cm/sec की दर से घट रही है और चौड़ाई 2cm/sec की दर से बढ़ रही है।
2. (i) दिए गए आयत R_1 का क्षेत्रफल $= 16 \times 8 = 128$ cm^2
   (ii) आयत R_2 का क्षेत्रफल $= 15 \times 10$ cm^2 $= 150$ cm^2 (1 सेकेंड के अंत में)
   (iii) R_3 का क्षेत्रफल = 168 cm^2 (2 सेकेंड के अंत में)
   (iv) R_4 का क्षेत्रफल = 182 cm^2 (3 सेकेंड के अंत में)
   (v) R_5 का क्षेत्रफल = 192 cm^2 (4 सेकेंड के अंत में)
   (vi) R_6 का क्षेत्रफल = 198 cm^2 (5 सेकेंड के अंत में)
   (vii) R_7 का क्षेत्रफल = 200 cm^2 (6 सेकेंड के अंत में)
   (viii) R_8 का क्षेत्रफल = 198 cm^2 (7 सेकेंड के अंत में) और इसी प्रकार आगे भी

अतः आयत का क्षेत्रफल 6 सेकेंड के अंत में) अधिकतम होगा।

प्रेक्षण

1. आयत R_2 का क्षेत्रफल (1 सेकेंड के अंत में) = ____________
2. आयत R_4 का क्षेत्रफल (3 सेकेंड के अंत में) = ____________
3. आयत R_6 का क्षेत्रफल (5 सेकेंड के अंत में) = ____________
4. आयत R_7 का क्षेत्रफल (6 सेकेंड के अंत में) = ____________
5. आयत R_8 का क्षेत्रफल (7 सेकेंड के अंत में) = ____________
6. आयत R_9 का क्षेत्रफल (8 सेकेंड के अंत में) = ____________
7. आयत का अधिकतम क्षेत्रफल (... ..... सेकेंड के अंत में) = ________है।

8. आयत का क्षेत्रफल __________ सेकेंड के अंत पर अधिकतम है।

9. आयत का अधिकतम क्षेत्रफल __________ है।

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप का उपयोग एक फलन में परिवर्तन की दर और इष्टतमीकरण (optimisation) की संकल्पनाओं को समझने में किया जा सकता है।

टिप्पणी

मान लीजिए कि आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः a और b हैं।

t सेकेंड बाद आयत की लंबाईं $= a - t$.

t सेकेंड बाद आयत की चौड़ाई $= b + 2t$.

आयत का क्षेत्रफल (t सेकेंड बाद) $= \text{A}(t) = (a - t)(b + 2t) = ab - bt + 2at - 2t^2$

$\text{A}'(t) = -b + 2a - 4t$

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए $\text{A}'(t) = 0$.

$$\text{A}'(t) = 0 \quad t \quad \frac{2a - b}{4}$$

$$\text{A}''(t) = -4$$

$$\text{A}'' \ \frac{2a - b}{4} \ = -4$$, जो ऋणात्मक है।

इस प्रकार $\text{A}(t)$ अधिकतम है जब $t = \dfrac{2a - b}{4}$ sec. है।

यहाँ $a = 16$ cm, $b = 8$ cm

अतः $t = \dfrac{32 - 8}{4} = \dfrac{24}{4} = 6$ s

अतः 6 sec के अंत पर क्षेत्रफल अधिकतम होगा।

क्रियाकलाप 18

उद्देश्य

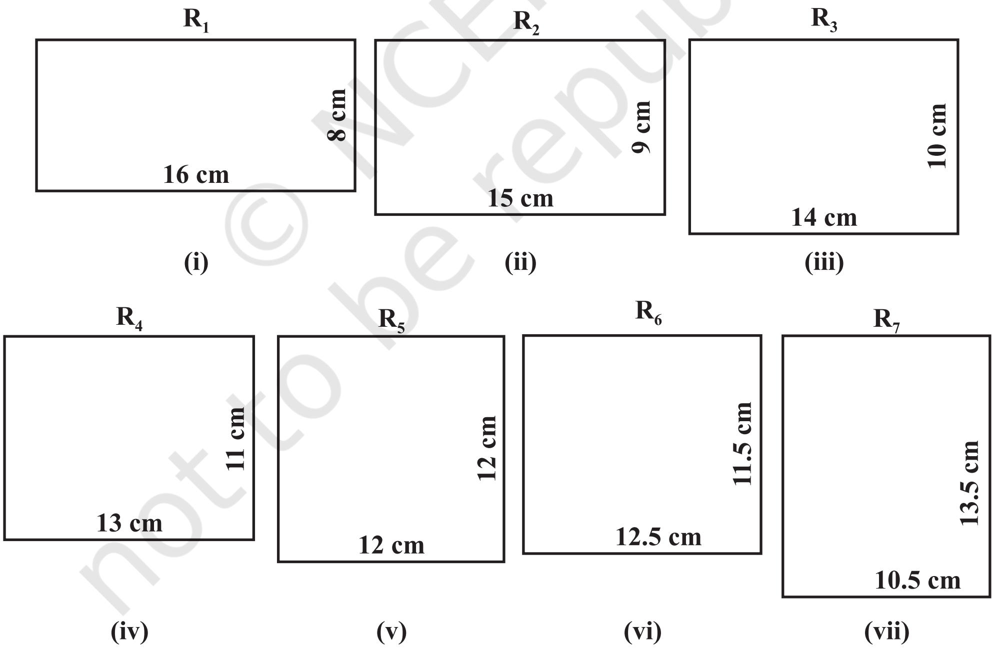
यह सत्यापित करना कि समान परिमाप वाले सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होगा।

आवश्यक सामग्री

चार्ट पेपर, पेपर कटर, स्केल, पेंसिल, रबर, कार्डबोर्ड, गोंद

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. चार्ट पेपर पर 48 cm परिमाप वाले आयत बनाइए। विभिन्न परिमाप वाले आयत नीचे दिए गए हैं–



आकृति 18

R_1 : 16 cm × 8 cm, R_2 : 15 cm × 9 cm

R_3 : 14 cm × 10 cm, R_4 : 13 cm × 11 cm

R_5 : 12 cm × 12 cm, R_6 : 12.5 cm × 11.5 cm

R_7 : 10.5 cm × 13.5 cm,

3. इन आयतों को काटकर कार्डबोर्ड पर चिपकाए गए सफ़ेद कागज़ पर चिपकाइए [देखिए आकृति 18(i) से 18(vii) तक]।
4. चरण 2 को 48 cm वाले परिमाप कुछ और भिन्न विमाओं वाले आयत लेकर दोहराइए।
5. इन आयतों को बार्ड पर चिपकाइए।

प्रदर्शन

1. आयत R_1 का क्षेत्रफल = 16 cm × 8 cm = 128 cm^2

   आयत R_2 का क्षेत्रफल = 15 cm × 9 cm = 135 cm^2

   आयत R_3 का क्षेत्रफल = 140 cm^2

   आयत R_4 का क्षेत्रफल = 143 cm^2

   आयत R_5 का क्षेत्रफल = 144 cm^2

   आयत R_6 का क्षेत्रफल = 143.75 cm^2

   आयत R_7 का क्षेत्रफल = 141.75 cm^2

2. प्रत्येक आयत का परिमाप समान है परंतु उनके क्षेत्रफल भिन्न हैं। आयत R_5 का क्षेत्रफल अधिकतम है। यह एक 12 cm का वर्ग है। इसे दी गई टिप्पणी में सैद्धान्तिक विवरण के इस्तेमाल से सत्यापित किया जा सकता है।

प्रेक्षण

1. प्रत्येक आयत R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 का परिमाप __________ है।

2. आयत R_3 का क्षेत्रफल आयत R_5 के क्षेत्रफल से __________ है।

3. आयत R_6 का क्षेत्रफल आयत R_5 के क्षेत्रफल से __________ है।

4. आयत R_5 की विमाएँ ________ × ________ हैं, अतः यह एक __________ है।

5. समान परिमाप वाले सभी आयतों में __________ का क्षेत्रफल अधिकतम है।

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप एक फलन के अधिकतम मान की संकल्पना को स्पष्ट करने में उपयोगी है। यह परिणाम अर्थिक पैकेज बनाने में भी उपयोगी है।

टिप्पणी

मान लीजिए कि आयत की लंबाई और चौड़ाई (cm में) x और y है।

आयत का परिमाप P = 48 cm

इसलिए $2(x+y) = 48$

या $x + y = 24$ or $y = 24 - x$

मान लीजिए कि आयत का क्षेत्रफल $A(x)$ है, तब

$A(x) = xy$

$= x(24 - x)$

$= 24x - x^2$

इसलिए $A'(x) = 24 - 2x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 24 - 2x = 0 \Rightarrow x = 12$

$A''(x) = -2$

$A''(12) = -2$, जो ऋणात्मक है।

इसलिए, क्षेत्रफल अधिकतम है जब $x = 12$ है।

$y = x = 24 - 12 = 12$

इसलिए $x = y = 12$

अतः सभी आयतों में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

क्रियाकलाप 19

उद्देश्य

निश्चित समाकलन $\int_a^b \sqrt{(1-x^2)}\, dx$ के मान का योग फल की सीमा के रूप में परिकलन करना और इसको वास्तविक समाकलन द्वारा सत्यापित करना।

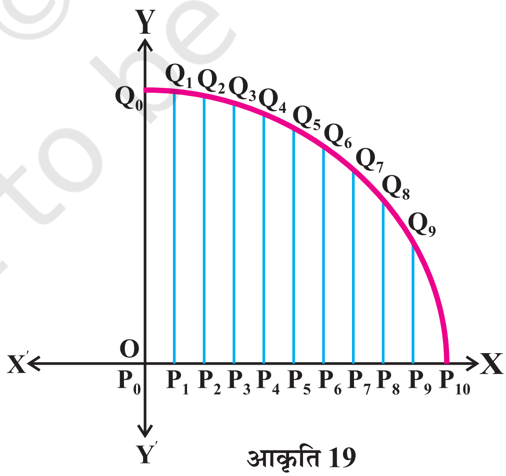
आवश्यक सामग्री

कार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़, स्केल, पेंसिल, ग्राफ़ पेपर

रचना की विधि

1. उपयुक्त आकार का एक कार्डबोर्ड लीजिए और उस पर सफ़ेद कागज़ चिपकाइए।
2. निर्देशांक अक्षों XOX' और YOY' निरुपित करने वाली दो परस्पर लंब रेखाएँ खींचिए।
3. केंद्र O तथा त्रिज्या 1 इकाई (10 cm) वाले वृत्त का एक चतुर्थांश खींचिए जैसा आकृति 19 में दिखाया गया है।

प्रथम चतुर्थांश में वक्र, फलन $\sqrt{1-x^2}$ का अंतराल [0, 1] में ग्राफ़ निरुपित करता है।



आकृति 19

प्रदर्शन

1. मान लीजिए कि हम मूल बिंदु को P_0 से और जहाँ वक्र x-अक्ष और y-अक्ष को काटता है, उन बिंदुओं को क्रमशः P_{10} और Q_0 से निर्दिष्ट करते हैं।

2. P_0P_{10} को 10 बराबर भागों में बाँटिए और विभक्त बिंदुओं को $P_1, P_2, P_3, ..., P_9$ से निर्दिष्ट कीजिए।

3. प्रत्येक बिंदु P_i , $i = 1, 2, ..., 9$ से x-अक्ष पर लंब खींचिए जो वक्र को क्रमशः बिंदुओं Q_1, $Q_2, Q_3 ,..., Q_9$ पर मिलते हैं $P_0Q_0, P_1 Q_1, ..., P_9Q_9$ की लंबाइयों को मापिए और उनको $y_0, y_1 , ..., y_9$ नामांकित कीजिए। प्रत्येक भाग $P_0P_1, P_1P_2, ...,$ की लंबाई 0.1 इकाई है

4. $y_0 = P_0Q_0 = 1$ इकाई

   $y_1 = P_1Q_1 = 0.99$ इकाई

   $y_2 = P_2Q_2 = 0.97$ इकाई

   $y_3 = P_3Q_3 = 0.95$ इकाई

   $y_4 = P_4Q_4 = 0.92$ इकाई

   $y_5 = P_5Q_5 = 0.87$ इकाई

   $y_6 = P_6Q_6 = 0.8$ इकाई

   $y_7 = P_7Q_7 = 0.71$ इकाई

   $y_8 = P_8Q_8 = 0.6$ इकाई

   $y_9 = P_9Q_9 = 0.43$ इकाई

   $y_{10} = P_{10}Q_{10} = 0$ बहुत छोटा लगभग 0 है।

5. वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल (वक्र और दोनों अक्षों से घिरे हुए भाग का क्षेत्रफल) = सभी समलंबों के क्षेत्रफल का योग

$$=\frac{1}{2}\times 0.1\begin{bmatrix}(1+0.99)+(0.99+0.97)+(0.97+0.95)+(0.95+0.92)\\ +(0.92+0.87)+(0.87+0.8)+(0.8+0.71)+(0.71+0.6)\\ +(0.6+0.43)+(0.43)\end{bmatrix} \text{ वर्ग इकाई}$$

$= 0.1\ [0.5+0.99+0.97+0.95+0.92+0.87+0.80+0.71+0.60+0.43]$ वर्ग इकाई

$= 0.1 \times 7.74$ वर्ग इकाई (लगभग)= 0.774 वर्ग इकाई (लगभग)

6. निश्चित समाकलन = $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1 \text{ वर्ग इकाई } =\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \text{ वर्ग इकाई } =\frac{3.14}{4} \text{ वर्ग इकाई } = 0.785 \text{ वर्ग इकाई}$$

इस प्रकार चतुर्थांश का क्षेत्रफल, एक योगफल की सीमा के रूप में लगभग वही है जो वास्तविक समाकलन से प्राप्त हुआ।

प्रेक्षण

1. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त के चाप को निरुपित करने वाला फलन $y =$ _______ है।
2. इकाई त्रिज्या के वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx =$ ________ वर्ग इकाई।
3. चतुर्थांश का योगफल की सीमा के रूप में क्षेत्रफल = ________ वर्ग इकाई
4. दोनों ही क्षेत्रफल लगभग __________ हैं।

अनुप्रयोग

इस प्रकार के क्रियाकलाप का उपयोग वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्रफल की संकल्पना का प्रदर्शन करने के लिए किया जा सकता है।

टिप्पणी

इसी क्रियाकलाप का वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ का ग्राफ़ खींच कर प्रदर्शन कीजिए और $x = 1$ और $x = 2$ के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

क्रियाकलाप 20

उद्देश्य

ज्यामितीय रूप से यह सत्यापित करना कि

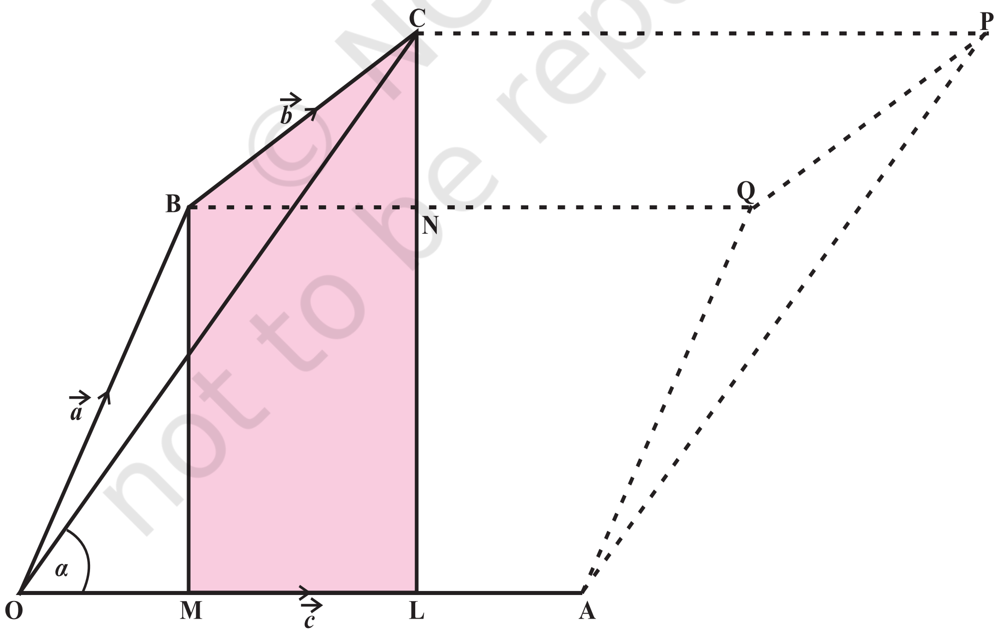
$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$

आवश्यक सामग्री

ज्यामितीय बाक्स, कार्डबोर्ड, सफ़ेद कागज़, कटर, स्केच पेन, सेलोटेप

रचना की विधि

1. कार्डबोर्ड पर सफ़ेद कागज़ स्थिर कीजिए।
2. एक रेखा खंड OA (= 6 cm, मान लीजिए) खींचिए। मान लीजिए कि यह $\vec{c}$ को निरूपित करता है।
3. एक दूसरा रेखा खंड OB (= 4 cm, मान लीजिए) खींचिए जो OA से एक कोण (60°) बनाए। माना $\overrightarrow{OB}=\vec{a}$



आकृति 20

4. $\overrightarrow{\text{OA}}$ से कोण (मान लीजिए 30°) बनाते हुए BC (= 3 cm, मान लीजिए) खींचिए। मान लीजिए कि $\overrightarrow{\text{BC}} = \vec{b}$

5. लंब BM, CL और BN खींचिए।

6. समांतर चतुर्भुज OAPC, OAQB और BQPC को पूरा कीजिए। (देखिए आकृति 20)।

प्रदर्शन

1. $\overrightarrow{\text{OC}} = \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{BC}} = \vec{a} + \vec{b}$, और मान लीजिए कि $\angle \text{COA} = \alpha$.

2. $\left|\vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right| = \left|\vec{c}\right|\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \sin \alpha$ = समांतर चतुर्भुज OAPC का क्षेत्रफल

3. $\left|\vec{c} \times \vec{a}\right|$ = समांतर चतुर्भुज OAQB का क्षेत्रफल

4. $\left|\vec{c} \times \vec{b}\right|$ = समांतर चतुर्भुज BQPC का क्षेत्रफल

5. समांतर चतुर्भुज OAPC का क्षेत्रफल = (OA) (CL)

= (OA) (LN + NC) = (OA) (BM + NC)

= (OA) (BM) + (OA) (NC)

= समांतर चतुर्भुज OAQB का क्षेत्रफल + समांतर चतुर्भुज BQPC का क्षेत्रफल

$= \left|\vec{c} \times \vec{a}\right| + \left|\vec{c} \times \vec{b}\right|$

इसी प्रकार $\left|\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})\right| = \left|\vec{c} \times \vec{a}\right| + \left|\vec{c} \times \vec{b}\right|$

सदिशों $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{c} \times \vec{a}$ और $\vec{c} \times \vec{b}$ में से प्रत्येक की दिशा एक ही तल के लंबवत् है।

इसलिए, $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{b}$

प्रेक्षण

$|\vec{c}|=|\overline{\text{OA}}|= \text{OA} =$ ________

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\overline{\text{OC}}|=\text{OC}=$ _______

CL = _______

$|\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})|$ = समांतर चतुर्भुज OAPC का क्षेत्रफल

= (OA) (CL) = _______________ वर्ग इकाई (i)

$|\vec{c}\times\vec{a}|$ = समांतर चतुर्भुज OAQB का क्षेत्रफल

= (OA) (BM) = ______ × ______ = _______ (ii)

$|\vec{c}\times\vec{b}|$ = समांतर चतुर्भुज BQPC का क्षेत्रफल

= (OA) (CN) = ______ × ______ = _______ (iii)

(i), (ii) और (iii) से

समांतर चतुर्भुज OAPC का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज OAQB का क्षेत्रफल + समांतर चतुर्भुज __________ का क्षेत्रफल

इस प्रकार $|\vec{c}\times|(\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}\times\vec{a}|+|\vec{c}\times\vec{b}|$

सभी, $\vec{c}\times\vec{a}$, $\vec{c}\times\vec{b}$ और $\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, पेपर के तल की दिशा के ________ हैं।

इसलिए, $\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{c}\times\vec{a}+$ ________

अनुप्रयोग

इस क्रियाकलाप के द्वारा, सदिशों के योग पर गुणन के वितरणात्मक गुण को स्पष्ट किया जा सकता है।

टिप्पणी

इस क्रियाकलाप को समांतर चतुर्भुज के स्थान पर आयत लेकर भी किया जा सकता है।